Una solución para la PEP 1

Edgard A. Araya C.
Álgebra I - PEP 1
10/Mayo/2019

① Ⓐ $C \subseteq A$ ssi $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

Dem: $(\Rightarrow)$ Suponemos que $C \subseteq A$.

$\Rightarrow (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ $\quad / C \subseteq A \Leftrightarrow A \cup C = A$

$= A \cap (B \cup C)$ //

$(\Leftarrow)$ Suponemos que $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ (Hipótesis)

Demostraremos que $C \subseteq A$, o equivalentemente, que

$\forall x \ (x \in C \Rightarrow x \in A)$

Entonces, procedemos:

$x \in C$

$\Rightarrow x \in C \vee x \in (A \cap B)$

$\Rightarrow x \in ((A \cap B) \cup C)$ $\quad$ / por Hipótesis

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C)$ $\quad / x \in C \Rightarrow x \in C \vee x \in B \Rightarrow x \in B \cup C$

$\therefore$, $x \in B \cup C$ es verdadero!!!

$\Rightarrow x \in A$ //

$\therefore$, $C \subseteq A \Leftrightarrow (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

---

① Ⓑ $A \cap (B \cup C) = A \cap B \Leftrightarrow A \cap C = \phi$

Dem: $(\Leftarrow)$ Suponemos que $A \cap C = \phi$.

$\Rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\quad / A \cap C = \phi$

$= (A \cap B) \cup \phi$

$= A \cap B$ //

$(\Rightarrow)$ Suponemos que $A \cap (B \cup C) = A \cap B$.

Si $A \cap C \neq \phi$, por la demostración anterior, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\supsetneq A \cap B$.

Luego, como se contradice la hipótesis, entonces es falso que $A \cap C \neq \phi$. $\therefore$, $A \cap C = \phi$. //

2 A $\underset{}{(p \wedge \sim q) \overset{i}{\Longrightarrow} r}$; $(p \wedge \sim r) \overset{ii}{\Longrightarrow} q$; $p \overset{iii}{\Longrightarrow} (q \vee r)$ equivalentes.

Dem: i, ii y iii equivalentes $\Longleftrightarrow$ (i $\Rightarrow$ ii $\wedge$ ii $\Rightarrow$ iii $\wedge$ iii $\Rightarrow$ i)

i $\Longrightarrow$ ii

$$(p \wedge \sim q) \Longrightarrow r \equiv \sim(p \wedge \sim q) \vee r \equiv (\sim p \vee q) \vee r \equiv (\sim p \vee r) \vee q$$
$$\equiv \sim(p \wedge \sim r) \vee q \equiv (p \wedge \sim r) \Longrightarrow q \;//.$$

ii $\Rightarrow$ iii

$$(p \wedge \sim r) \Longrightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim r) \vee q \equiv (\sim p \vee r) \vee q \equiv \sim p \vee (r \vee q)$$
$$\equiv \sim p \vee (q \vee r) \equiv p \Longrightarrow (q \vee r) \;//.$$

iii $\Longrightarrow$ i

$$p \Longrightarrow (q \vee r) \equiv \sim p \vee (q \vee r) \equiv (\sim p \vee q) \vee r \equiv \sim(p \wedge \sim q) \vee r$$
$$\equiv (p \wedge \sim q) \Longrightarrow r \;/.$$

$\therefore$, i, ii y iii son equivalentes.

B $\exists s \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{Z} \; (t * s \notin \mathbb{Z})$. ¿Es verdadera?

Dem: Si $t = \pm 1$, entonces basta $s = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ y $t * s = \pm 1 * \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Si $t \neq \pm 1$, entonces basta $s = \frac{1}{t^2} \in \mathbb{R}$ y $t * s = t * \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t} \notin \mathbb{Z}$ //.

$\therefore$, la afirmación es verdadera.

---

③ $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ \dfrac{1}{x+2} & -2 < x < 0 \\ -2x + \dfrac{1}{2} & 0 \leq x \end{cases}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

P.D.: f es sobreyectiva $\iff$ $Rec(f) = \mathbb{R}$

Dem: ⓘ $x \leq -2 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow \boxed{y \geq 4}$

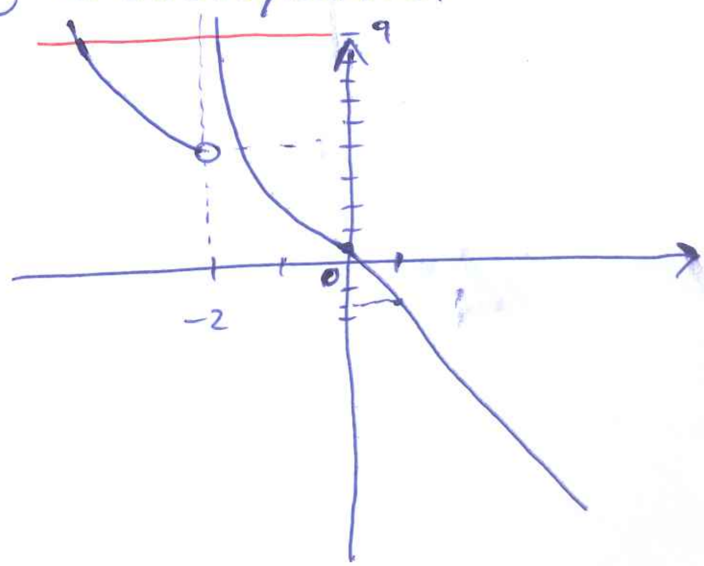
ⓘⓘ $-2 < x < 0 \Rightarrow 0 < x+2 < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{x+2} > 0 \wedge \dfrac{1}{x+2} > \quad \Rightarrow \boxed{y > \dfrac{1}{2}}$

ⓘⓘⓘ $0 \leq x \Rightarrow -2x \quad 0 \Rightarrow -2x + \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y \leq \dfrac{1}{2}}$

$Rec(f) = [4, +\infty) \cup (1/2, +\infty) \cup (-\infty, 1/2] = \mathbb{R}$.

$\therefore$, f es sobreyectiva.

Con ayuda del gráfico, podemos ver rápidamente que f no es inyectiva, pues hay dos valores $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = 9 = f(x_2)$. **Pero!!!** Hay que demostrarlo.



P.D.: f es inyectiva.

Dem: $x \in \mathbb{R}$ cumple con ⓘ $x \leq -2$

ⓘⓘ $-2 < x < 0$

ⓘⓘⓘ $0 \leq x$

ⓘ $-2 < x_1 < 0$, $-2 < x_2 < 0$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{1}{x_1+2} = \dfrac{1}{x_2+2} \Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$ //.

ⓘⓘ $0 \leq x_1$, $0 \leq x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -2x_1 + \dfrac{1}{2} = -2x_2 + \dfrac{1}{2} \Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ //.

ⓘⓘⓘ $-2 < x_1 < 0$, $0 \leq x_2$ $(x_1 \neq x_2)$

Ya vimos que $f(x_1) > \dfrac{1}{2}$ y $f(x_2) \leq \dfrac{1}{2}$.

$\therefore$, $f(x_1) \neq f(x_2)$ //.

(iv) $x_1 \leq -2$, $x_2 \leq -2$

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1^2 = x_2^2 \overset{\substack{(x_1<0)\\(x_2<0)}}{\Longrightarrow} -x_1 = -x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

(v) $x_1 \leq -2$, $-2 < x_2 < 0$ (Demostración Contraejemplo)

Vemos que si $x_1 = -3$ y $x_2 = -\frac{17}{9}$ $(x_1 \neq x_2)$

$x_1^2 = 9 \Longrightarrow \boxed{x_1 = -3}$

$\frac{1}{2+x_2} = 9 \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{9} - 2$

$\boxed{x_2 = -\frac{17}{9}}$

se obtiene:

$$f(x_1) = (-3)^2 = 9 \quad y \quad f(x_2) = \frac{1}{-\frac{17}{9}+2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$$

$\therefore$, existe $x_1 = -3$ y $x_2 = -\frac{17}{9}$ tales que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

$\therefore$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es inyectiva.

En este caso, vimos que para $-2 < x_1 < 0$ y $0 \leq x_2$, la inyectividad no falla. Luego, si restringimos el dominio a $(-2, +\infty)$, entonces f será inyectiva.

$\therefore$, $g : (-2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ es sobreyectiva, es inyectiva y, por lo tanto, es biyectiva.