Una solución para el Control

Edgard A. Araya C.
Álgebra I - Control 1
06/ Mayo / 2019

① Ⓐ Decir que una proposición es tautología equivale a decir que para todo valor de verdad de sus proposiciones atómicas, la proposición será verdad.

Por ello, veremos si existe algún caso en que ésta sea falsa; es decir, que $\sim(p \Leftrightarrow q)$ tenga distinto valor de verdad que $(\sim p \Leftrightarrow \sim q)$.

Supondremos primero que $(\sim p \Leftrightarrow \sim q)$ es falsa. Entonces, $\sim p$ y $\sim q$ tendrán distinto valor de verdad (2 casos).

ⓘ $\sim p$ verdad, $\sim q$ falso $\Rightarrow$ p falso, q verdad $\Rightarrow$ $(p \Leftrightarrow q)$ falso $\Rightarrow$ $\sim(p \Leftrightarrow q)$ verdad

(Con esto ya basta, pero ...)

ⓘⓘ $\sim p$ falso, $\sim q$ verdad $\Rightarrow$ p verdad, q falso $\Rightarrow$ $(p \Leftrightarrow q)$ falso $\Rightarrow$ $\sim(p \Leftrightarrow q)$ verdad.

$\therefore$, la proposición dada no es tautología.

---

① Ⓑ Como la proposición $(p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim(q \Rightarrow r)$ es falsa, eso significa que $(p \wedge \sim r)$ verdadera y que $\sim(q \Rightarrow r)$ falsa.

* Como $(p \wedge \sim r)$ verdadera, entonces p verdadera y $\sim r$ verdad.
* Como $\sim r$ verdadera, entonces r falsa.
* Como $\sim(q \Rightarrow r)$ falsa, entonces $(q \Rightarrow r)$ verdadera.
* Como $(q \Rightarrow r)$ verdadera y r falsa, entonces q falsa.

$\therefore$, la proposición del enunciado es falsa.

② Forma 1: Obviando por un momento que se trata del conjunto vacío $\emptyset$, demostrar que $\emptyset \subseteq A$ es equivalente a demostrar $\forall x \; (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$.

Como no existe x tal que $x \in \emptyset$, estamos en un caso en que falso implica verdadero, cuyo valor de verdad es verdadero. $\therefore$, $\emptyset \subseteq A$ //.

Forma 2: Partiendo del mismo punto $(\forall x \, (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A))$, demostraremos la falsedad de la negación de la proposición. Es decir: $\emptyset \not\subseteq A$.

$$\Leftrightarrow \sim (\forall x \; (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)) \Leftrightarrow \exists x \; (\sim (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \, (\sim (x \notin \emptyset \vee x \in A)) \Leftrightarrow \exists x \, (x \in \emptyset \wedge x \notin A)$$

En este caso, $x \in \emptyset$ es falso, por lo que la negación de la proposición es falsa. $\therefore$, $\emptyset \subseteq A$ //.

---

③ $B - (B - A) = A \iff A \subseteq B$

Dem: $(\Leftarrow)$ Suponer verdadero que $A \subseteq B$; es decir, que $x \in A \Rightarrow x \in B$ es verdadero.

Ahora, debemos demostrar que $B - (B - A) = A$; es decir, que $x \in B - (B - A) \iff x \in A$.

Podemos suponer que $x \in A$ es verdadero (si no, el problema no tendrá sentido). Entonces, vamos a demostrar que $x \in B - (B - A)$ es verdadero.

$$\begin{aligned} x \in B - (B - A) &\Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin (B - A) \\ &\Leftrightarrow x \in B \wedge \sim (x \in B \wedge x \notin A) \\ &\Leftrightarrow x \in B \wedge (x \notin B \vee x \in A) \\ &\Leftrightarrow (x \in B \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \in A) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B. \end{aligned}$$

Como supusimos $x \in A$ y $x \in A \Rightarrow x \in B$, entonces $x \in B$ es verdadero.

$\therefore$, $x \in A \iff x \in B - (B - A)$ $\quad$ $\therefore$, $B - (B - A) = A$ //.

($\Rightarrow$) Suponer verdadero que $B-(B-A)=A$; es decir, que $x \in B-(B-A) \Longleftrightarrow x \in A$. es verdadero.

Ahora, debemos demostrar que $A \subseteq B$; es decir, que $x \in A \Longrightarrow x \in B$.

Podemos suponer que $x \in A$ (si no, el problema no tendrá sentido). Entonces, <u>debemos demostrar</u> que $x \in B$.

Como ya vimos antes, $x \in B-(B-A) \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B$. Luego, como sabemos que $x \in A \wedge x \in B$ es verdadero y supusimos que $x \in A$ es verdadero, no queda otra posibilidad y se concluye que $x \in B$. es verdadero.

$\therefore,\ A \subseteq B$ //.

$\therefore,\ B-(B-A)=A \Longleftrightarrow A \subseteq B$

---

(4) Para dar forma lógica al problema, definiremos las siguientes proposiciones:

p : la asesina de LeBlanc fue María Agnesi.

q : la asesina de LeBlanc fue Emmy Noether.

r : la asesina de LeBlanc fue Sofía Kovalevskaya.

s : el crimen ocurrió antes de la medianoche.

Con ello, es cierto que:

* $p \vee q \vee r$ * $p \Rightarrow s$ * $\sim s \Rightarrow \sim q$ * $\sim s$.

- Como $\sim s$ es verdadera y $(\sim s \Rightarrow \sim q)$ verdadera, entonces $\sim q$ verdad.
- Como $\sim q$ verdadera, entonces <u>q falsa</u>.
- Como $\sim s$ verdadera, entonces <u>s falsa</u>.
- Como s falsa y $p \Rightarrow s$ verdadera, entonces <u>p falsa</u>.
- Como $p \vee q \vee r$ verdadera, p falsa y q falsa, entonces <u>r verdad</u>.

$\therefore$, la asesina de Le Blanc fue Sofía Kovalevskaya.