22202 Álgebra I – Ayudantía 11

Homomorfismo de Grupos

Martes 19 de Enero de 2021

$f(e_1) = e_2$

Dem: $f(e_1) = f(e_1 * e_1)$ (HOMOMORFISMO) $= f(e_1) \# f(e_1)$

$\Longrightarrow f(e_1) = f(e_1) \# f(e_1)$ / $\# f(e_1)^{-1}$

$\Longrightarrow f(e_1) \# f(e_1)^{-1} = f(e_1) \# [f(e_1) \# f(e_1)^{-1}]$

$\Longrightarrow e_2 = f(e_1) \# e_2$

$\Longrightarrow e_2 = f(e_1)$

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x - y; z)$. Considerar la suma de vectores en $\mathbb{R}^3$:

   a. Demostrar que f es homomorfismo.

   b. Determinar $\mathrm{Ker}(f)$.

a. $f: G_1 \to G_2$ homomorfismo $f(a+b) = f(a) + f(b)$

+: suma en R^3 +: suma en R^2

a,b en R^3 , f(a), f(b) en R^2

$a=(x_1,y_1,z_1)$ $b=(x_2,y_2,z_2)$ $\Longrightarrow a+b = (x_1 +x_2 ; y_1 + y_2 ; z_1 + z_2)$

$f(a+b) = f(x_1 +x_2 ; y_1 + y_2 ; z_1 + z_2) = [(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) ; (z_1 + z_2)]$

$= [x_1 + x_2 - y_1 - y_2 ; z_1 + z_2]$

$f(a) + f(b) = [x_1 - y_1 ; z_1] + [x_2 - y_2 ; z_2] = [(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) ; (z_1 + z_2)]$

$= [x_1 + x_2 - y_1 - y_2 ; z_1 + z_2]$

Por lo tanto, f(a+b) = f(a) + f(b), por lo que f es homomorfismo.

b. Para todo x en R^3 (x en Ker(f) $\Longleftrightarrow$ $f(x) = e_2$)

$x = (x_1, y_1, z_1)$

$f(x) = e_2 \Longrightarrow (x_1 - y_1 ; z_1) = (0;0)$ / $(a,b) = (c,d) \Longleftrightarrow a=c \wedge b=d$

$\Longrightarrow x_1 - y_1 = 0 \wedge z_1 = 0$

$\Longrightarrow x_1 = y_1 \wedge z_1 = 0$

x = (0,0,0) en Ker(f) x = (1,1,0) en Ker (f) x = (-4,-4,0) en Ker(f)

En general, x=(a,a,0), a en R, será tal que x en Ker(f) $\Longrightarrow$ Ker(f) = {(a,a,0) en R^3, a en R}

5. Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$. Considerar la suma usual en $\mathbb{R}$:

   a. Demostrar que f es homomorfismo.

   b. Demostrar que f NO es inyectiva.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

a. $f(A+B)=f(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix})=(a+e)+(d+h)=a+d+e+h$

$$f(A)+f(B)=(a+d)+(e+h)=a+d+e+h$$

Por lo tanto, f es homomorfismo.

b. X en Ker(f) <==> f(X) = 0

$$f(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})=a+d=0 \Rightarrow a=-d \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \wedge d \in \mathbb{R}$$

$$X=\begin{bmatrix} -d & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Luego, Ker(f) = $Ker(f)=\left\{X=\begin{bmatrix} -d & b \\ c & d \end{bmatrix}, b, c, d \in \mathbb{R}\right\} \neq \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ **Por lo tanto, f no es inyectiva.**

7. Dado $n \in \mathbb{Z}$, sea $G_n : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $G_n(x) = x^{2n}$. Considerar el producto usual de $\mathbb{R} - \{0\}$:

   a. Demostrar que G_n es homomorfismo.

   b. Determinar $\mathrm{Ker}(G_n)$ e $\mathrm{Im}(G_n)$.

a. G_n (x*y) = G_n (x) # G_n (y)

G_n (x·y) = (x·y)^2n

G_n(x) = x^2n   G_n(y) = y^2n   G_n(x) · G_n(y) = (x^2n) · (y^2n) = (x·y)^2n

Por lo tanto, G_n(x) es homomorfismo.

b. x en Ker(f) <==> G_n(x) = 1   <==> x^2n = 1 = 1^2n   x^2n = (x^2)^n = (x^n)^2

x=1 cumple, pues 1^2n = 1

x= - 1 cumple, pues (-1)^2n = [(-1)^2]^n = 1^n = 1

Por lo tanto, Ker(G_n) = {-1, 1} <> {1}. Luego, f NO es inyectiva.

Im(G_n) = {y en R-{0} : y = x^2n > 0} = R^{+} .