



# Estructura de Grupo

Viernes 15 de Enero de 2021

1. Decida si la estructura  $(G, *)$  es un grupo. Si no lo es, diga cuál de las propiedades de grupo no se cumple:

- $G = \mathbb{Z}$  tal que  $a * b = a \cdot b$  (producto usual en  $\mathbb{Z}$ )
- $G = \mathbb{Z}$  tal que  $a * b = a - b$  (resta usual en  $\mathbb{Z}$ )
- $G = \mathbb{N}$  tal que  $a * b = a^b$  (potencia con base y exponente en  $\mathbb{N}$ )
- $G = \mathbb{Z}_4$  tal que  $a * b = \bar{a} \bullet_4 \bar{b}$  (producto módulo 4)

1a. Cerrada: sí, pues  $a*b$  en  $\mathbb{Z}$ .

Asociativa:  $(a*b)*c = a*(b*c)$

Neutro: existe 1 en  $\mathbb{Z}$  y cumple  $(1*a = a)$   $(a*1=1)$

Inverso:  $a=1 \implies a' * a = a' \cdot a = a' \cdot 1 = 1 \implies a' = 1$

$$a=-1 \implies a'=-1$$

$$a \neq -1 \wedge a < 1 \implies a' * a = 1 \implies a' = 1/a \text{ no en } \mathbb{Z} \text{ FALLA}$$

Por lo tanto,  $(G, *)$  no es grupo.

1b. Cerrada:  $a-b$  en  $\mathbb{Z}$ .

Asociativa:  $(a-b)-c = [a+(-b)] + (-c) = a + (-b) + (-c)$

$$a-(b-c) = a+(-b+c) = a + -[b+(-c)] = a+(-b) + c \neq a + (-b) + (-c) \text{ (Iguales solo si } c=0\text{)}.$$

FALLA

Por lo tanto,  $(G, *)$  no es grupo.

1c. Cerrada: sí, pues  $a^b = a \cdot a \cdot a \dots \cdot a$  (b veces) (por Inducción).

Asociativa:  $(a^b)^c = a^{(b^c)}$

$$\text{Ej: } a=5 \ b=3 \ c=2 \implies (a^b)^c = (5^3)^2 = 125^2 = 5^6$$

$$a^{(b^c)} = 5^{(3^2)} = 5^9 \neq 5^6 \text{ FALLA}$$

Por lo tanto,  $(G, *)$  no es grupo.

1d.

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1



Hola