22202 Álgebra I – Ayudantía 09

Más sobre Funciones

Viernes 08 de Enero de 2021

9.1. Ejercicios propuestos

1. Sean $f(x) = 2x, g(x) = \dfrac{1}{x}, h(x) = \dfrac{1}{1-x}, I(x) = x$, todas funciones de Dom$(f)$ en $\mathbb{R}$. Determinar dominio, recorrido y regla de asignación de:

a. $f \circ g$

b. $g \circ f$

c. $h \circ g$

d. $h \circ I$

2. Determinar si las siguientes funciones de Dom(f) en $\mathbb{R}$ son invertibles; en caso favorable, determinar la inversa:

a. $f(x) = x^3$

b. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c. $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$

d. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

3. Demostrar que la siguiente función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es invertible y determinar su inversa:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

4. Dadas las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3+2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 3x+2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x > -1 \\ 3x-2 & \text{si } x \leqslant -1 \end{cases}$$

a. Demostrar que f es biyectiva pero g no lo es.

b. Determinar $g \circ f^{-1}$

9.2. Una solución para los ejercicios

1. Antes de proceder, analicemos a las funciones dadas en cuanto a su dominio maximal y recorrido:

Para $f(x) = 2x \qquad \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\ ,\ \mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}.$

Para $g(x) = \dfrac{1}{x} \qquad \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\}\ ,\ \mathrm{Rec}(g) = \mathbb{R} - \}0\}.$

Para $h(x) = \dfrac{1}{1-x} \qquad \mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{1\}\ ,\ \mathrm{Rec}(h) = \mathbb{R} - \{0\}.$

Para $I(x) = x \qquad \mathrm{Dom}(I) = \mathbb{R}\ ,\ \mathrm{Rec}(I) = \mathbb{R}.$

Lo primero que notamos es que **no todas las funciones dadas son de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$**. Con esto en vista, pasamos a analizar las composiciones pedidas:

1. a. Como $f \circ g(x) = f[g(x)]$, se tiene que aplicar primero la función g, obteniendo un número real distinto de cero. Como el dominio de f admite cualquier número real, en particular admite a cualquier elemento del recorrido de g. Por último, como 0 no llega a pasar por f (pues no existe $g(x) = 0$), entonces $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$ no será parte del recorrido de la composición. Con ello, se obtiene:

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}\ ,\ \mathrm{Rec}(f \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Finalmente, la regla de asignación estará dada por:

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f[1/x] = 2 \cdot (1/x) = \boxed{\frac{2}{x} = f \circ g(x)}$$

1. b. Como $g \circ f(x) = g[f(x)]$, se tiene que aplicar primero la función f, obteniendo un número real cualquiera. Como el dominio de g admite solamente reales distintos de cero, debemos restringir el dominio de f quitando x tal que $f(x) = 0$; es decir, $x = 0$ no será parte del dominio de la composición. Así, el recorrido de la composición será el recorrido de g. Con ello, se obtiene:

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{0\}\ ,\ \mathrm{Rec}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Finalmente, la regla de asignación estará dada por:

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[2x] = \boxed{\frac{1}{2x} = g \circ f(x)}$$

1. c. Como $h \circ g(x) = h[g(x)]$, se tiene que aplicar primero la función g, obteniendo un número real distinto de cero. Como el dominio de h admite solamente reales distintos de uno, debemos restringir el dominio de g quitando x tal que $g(x) = 1$; es decir, $x = 1$ no será parte del dominio de la composición. Así, el recorrido de la composición será el recorrido de h. Con ello, se obtiene:

$$\mathrm{Dom}(h \circ g) = \mathbb{R} - \{0; 1\}\ ,\ \mathrm{Rec}(h \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Finalmente, la regla de asignación estará dada por:

$$h \circ g(x) = h[g(x)] = h[1/x] = \frac{1}{1 - (\frac{1}{x})} = \boxed{\frac{x}{x-1} = h \circ g(x)}$$

Observar que si se analiza <u>**solamente**</u> la regla de asignación para definir a la composición, el cero podría ser parte del dominio de la composición; sin embargo, esto no es correcto, pues **se debe respetar a las funciones que dieron origen a la composición**.

1. d. Como $h \circ I(x) = h[I(x)]$, se tiene que aplicar primero la función I. Sin embargo, observamos que la función I no es otra cosa que la función identidad (es decir, no tiene efecto alguno sobre x. El único inconveniente en este caso sería que h no admite en su dominio al 1; luego, $x = 1$ no puede ser parte del dominio de la composición. Por lo demás, el recorrido de la composición será el mismo recorrido de h. En resumen,

$$\mathrm{Dom}(h \circ I) = \mathbb{R} - \{1\} \ , \ \mathrm{Rec}(h \circ I) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Finalmente, la regla de asignación estará dada por:

$$h \circ I(x) = h[I(x)] = h[x] = \boxed{\frac{1}{1-x} = h \circ g(x)} \quad \square \, .$$

2. a. Vemos que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva y sobreyectiva (¿por qué?). Luego, f es biyectiva y, por lo tanto, es invertible.

Para determinar su inversa, hacemos $y = f(x)$ y despejamos x, obteniendo $f^{-1}(y)$:

$$y = x^3 \implies \sqrt[3]{y} = x \implies \boxed{f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}}$$

Por lo tanto, la inversa de f será: $\boxed{f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}}$

2. b. Vemos que $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva pero no sobreyectiva, puesto que $0 \notin$ Rec(f). Entonces, debemos restringir el codominio.

Así, $g : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ con $g(x) = f(x)$ será biyectiva y, por lo tanto, invertible.

Para determinar su inversa, hacemos $y = g(x)$ y despejamos x, obteniendo $g^{-1}(y)$:

$$y = \frac{1}{x} \implies \frac{1}{y} = x \implies \boxed{g^{-1}(y) = \frac{1}{y}}$$

Por lo tanto, la inversa de g será: $\boxed{g^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\} \ , \ g^{-1}(y) = \frac{1}{y}}$

2. c. Para poder analizar la función $f : \mathbb{R} - \{-1/2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada, podemos suponer por un momento que es biyectiva e invertirla "por la fuerza", arreglando los problemas en cuanto aparezcan:

$$y = \frac{x-3}{2x+1} \overset{x \neq \frac{-1}{2}}{\implies} y(2x+1) = x-3 \implies 2xy+y = x-3 \implies 2xy-x = -3-y \implies \boxed{x(2y-1) = -(3+y)}$$

En este paso, para poder despejar x, se hace necesario que $y \neq 1/2$. Con ello, vemos que el recorrido de f no contiene a $1/2$ y, por tanto, debemos restringir el codominio.

Así, $h : \mathbb{R} - \{-1/2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1/2\}$ con $h(x) = f(x)$ será biyectiva **(demostrar)** y, por lo tanto, invertible.

Como ya hicimos el trabajo para determinar la inversa, concluimos que la inversa de h será:

$$\boxed{h^{-1} : \mathbb{R} - \{1/2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-1/2\} \ , \ h^{-1}(y) = \frac{3+y}{1-2y}}$$

2. d. Para ver si $f : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ es invertible, podemos reescribir su regla de asignación:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} \overset{x \neq -1}{=} \boxed{x - 1 = f(x)}$$

Con ello, vemos rápidamente que si $x \neq -1$, entonces $f(x) \neq f(-1)$; es decir, -2 no es parte del recorrido de f. Por ello, nuevamente debemos restringir el codominio.

Así, $k : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-2\}$ con $k(x) = f(x)$ será biyectiva **(demostrar)** y, por lo tanto, invertible.

Para determinar su inversa, hacemos $y = k(x)$ y despejamos x, obteniendo $k^{-1}(y)$:

$$y = x - 1 \implies y + 1 = x \implies \boxed{k^{-1}(y) = y + 1}$$

Por lo tanto, la inversa de k será: $\boxed{k^{-1} : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-1\}\ ,\ k^{-1}(y) = y + 1}$ $\square$.

3. Para demostrar que f es invertible, debemos demostrar que es biyectiva:

- f es sobreyectiva, pues su recorrido es todo $\mathbb{R}$:

$$x \leqslant 2 \Rightarrow x + 2 \leqslant 4 \Rightarrow \boxed{y \leqslant 4} \text{ y } x > 2 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow \boxed{y > 4}$$

- Ahora veremos si f es inyectiva:

$$\begin{aligned} x_1 \leqslant 2 \wedge x_2 \leqslant 2 &\implies f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Longrightarrow x_1 = x_2 \\ x_1 > 2 \wedge x_2 > 2 &\implies f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2 \\ x_1 \leqslant 2 \wedge x_2 > 2\ (x_1 \neq x_2) &\implies f(x_1) \leqslant 4 \wedge f(x_2) > 4 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva, biyectiva y, por tanto, invertible.
Para determinar su inversa, debemos hacerlo en cada rama por separado; es decir:

$$\begin{aligned} x \leqslant 2 &\implies y = x + 2 \Longrightarrow \boxed{x = y - 2} \\ x > 2 &\implies y = 2x \Longrightarrow \boxed{x = \frac{y}{2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la inversa de f estará dada por:

$$\boxed{f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f^{-1}(x) = \begin{cases} y - 2 & \text{si } y \leqslant 4 \\ \dfrac{y}{2} & \text{si } y > 4 \end{cases}} \quad \square\ .$$

4. Para demostrar que f es biyectiva, debemos demostrar que:

- f es sobreyectiva, pues su recorrido es todo $\mathbb{R}$:

$$x \geqslant 0 \Rightarrow x^3 \geqslant 0 \Rightarrow \boxed{x^3 + 2 \geqslant 2} \text{ y } x < 0 \Rightarrow 3x < 0 \Rightarrow \boxed{3x + 2 < 2}$$

- Ahora veremos si f es inyectiva:

$$\begin{aligned} x_1 \geqslant 0 \wedge x_2 \geqslant 0 &\implies f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1^3 + 2 = x_2^3 + 2 \Longrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Longrightarrow x_1 = x_2 \\ x_1 < 0 \wedge x_2 < 0 &\implies f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \Longrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2 \\ x_1 \geqslant 0 \wedge x_2 < 0\ (x_1 \neq x_2) &\implies f(x_1) \geqslant 2 \wedge f(x_2) < 2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva, biyectiva y, por tanto, invertible.

Para demostrar que g es biyectiva, debemos demostrar que:

- g es sobreyectiva, pues su recorrido es todo $\mathbb{R}$:

$$x > -1 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow \boxed{x^2 - 1 > -1} \text{ y } x \leqslant -1 \Rightarrow 3x \leqslant -3 \Rightarrow \boxed{3x - 2 < -1}$$

No olvidemos el problema que hubo en la primera rama, pues nos ayudará a demostrar que g no es inyectiva:

Sea $x_1 = -1/2$ y $x_2 = 1/2$ $(x_1 \neq x_2)$. Entonces:

$$f(x_1) = (-1/2)^2 - 1 = (1/4) - 1 = -3/4$$
$$f(x_2) = (1/2)^2 - 1 = (1/4) - 1 = -3/4 \qquad (f(x_1) = f(x_2)$$

Por lo tanto, g no es inyectiva.

Para determinar la inversa de f, debemos hacerlo en cada rama por separado; es decir:

$$x \geqslant 0 \implies y = x^3 + 2 \implies x^3 = y - 2 \implies \boxed{x = \sqrt[3]{y-2}}$$
$$x < 0 \implies y = 3x + 2 \implies \boxed{x = \frac{y-2}{3}}$$

Por lo tanto, la inversa de f estará dada por:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{y-2} & \text{si } y \geqslant 2 \\ \dfrac{y-2}{3} & \text{si } y < 2 \end{cases}$$

Como ya vimos que ambas funciones (g y f^{-1}) van de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, podemos componerlas sin problemas mediante sus reglas de asignación. El detalle importante es que debemos considerar las ramas tanto de g como de f^{-1}:

- Si $x \leqslant -1$

$$g \circ f^{-1}(x) = g[f^{-1}(x)] = g[(x-2)/3] = 3\left(\frac{x-2}{3}\right) - 2 = (x-2) - 2 = x - 4$$

- Si $-1 < x < 2$

$$g[f^{-1}(x)] = g[(x-2)/3] = \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{(x-2)^2 - 9}{9} = \frac{x^2 - 4x + 4 - 9}{9} = \frac{x^2 - 4x - 5}{9}$$

- Si $x \geqslant 2$

$$g \circ f^{-1}(x) = g[f^{-1}(x)] = g[\sqrt[3]{x-2}] = (\sqrt[3]{x-2})^2 - 1 = (x-2)^{(2/3)} - 1$$

Por lo tanto, la función $g \circ f^{-1}$ estará dada por:

$$\boxed{g \circ f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ g \circ f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{(x-5)(x+1)}{9} & \text{si } -1 < x < 2 \\ (x-2)^{(2/3)} - 1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases} \quad \square .}$$