22202 Álgebra I – Ayudantía 08

Composición y Función Inversa

Viernes 08 de Enero de 2021

8.1. Ejercicios propuestos

1. Determine la composición $f \circ g$ (en ese orden) de las siguientes funciones. Indique dominio, regla de asignación y recorrido (en ese orden):

a. $g:\ \{1,2,3,4\} \longrightarrow \mathbb{Z},\ g(x) = 2x+1$
$f:\ \{a \in \mathbb{Z}:\ 1 \leqslant a \leqslant 15\} \longrightarrow \mathbb{Z},\ f(x) = 1-3x$

b. $g:\ \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ g(x) = 2x+1$
$f:\ \{a \in \mathbb{Z}:\ 1 \leqslant a \leqslant 15\} \longrightarrow \mathbb{Z},\ f(x) = 1-3x$

c. $g:\ \left\{a \in \mathbb{Q}:\ \dfrac{1}{2} < a < \dfrac{10}{3}\right\} \longrightarrow \mathbb{Q},\ g(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$
$f:\ \{x \in \mathbb{Q}:\ 2 \leqslant x \leqslant 5\} \longrightarrow \mathbb{Q},\ f(x) = 1 + \dfrac{3}{x}$

2. Sea $f:\ \mathsf{A} \longrightarrow \{y \in \mathbb{R}:\ \sqrt{3} \leqslant y < 4\},\ f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2+1}}$.

a. Determinar el dominio maximal de f.
b. Determinar el recorrido de f.
c. Determinar si f es biyectiva. Si no, restringir el dominio para que sea biyectiva.
d. Determinar f^{-1} en caso que f (o su restringida) sea biyectiva.

8.2. Una solución para los ejercicios

1. a. Dominio:

Bajo $g(x)$, se tiene:	Bajo $f(x)$, considerando $\mathrm{Dom}(f)$:	Bajo $f \circ g(x)$, se tiene:
$1 \longrightarrow 3$	$3 \longrightarrow -8$	$1 \longrightarrow -8$
$2 \longrightarrow 5$	$5 \longrightarrow -14$	$2 \longrightarrow -14$
$3 \longrightarrow 7$	$7 \longrightarrow -20$	$3 \longrightarrow -20$
$4 \longrightarrow 9$	$9 \longrightarrow -26$	$4 \longrightarrow -26$

Notamos que ningún valor de Rec(g) tiene problemas para ser parte de Dom(f); luego, se obtiene $\boxed{\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{1, 2, 3, 4\}}$.

Regla de Asignación:
Por definición, se tendrá que $f \circ g(x) = f[g(x)]$. Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= 1 - 3[g(x)] \\ &= 1 - 3(2x + 1) \\ &= 1 - 6x - 3 \\ f \circ g(x) &= -6x - 2 \end{aligned}$$

Recorrido:
De la inspección directa de los diagramas superiores, se obtiene:

$$\boxed{\mathrm{Rec}(f \circ g) = \{-26, -20, -14, -8\}} \quad \square .$$

1. b. Dominio:
Para determinarlo, partimos considerando que aquellos elementos de $\mathrm{Rec}(g)$ que también sean parte de $\mathrm{Dom}(f)$ serán los que permitirán la existencia de $f \circ g$. Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathrm{Dom}(g)\ (1 \leqslant 2x + 1 \leqslant 15) \\ \Leftrightarrow\ &\forall x \in \mathrm{Dom}(g)\ (0 \leqslant 2x \leqslant 14) \\ \Leftrightarrow\ &\forall x \in \mathrm{Dom}(g)\ (0 \leqslant x \leqslant 7) \end{aligned}$$

$\boxed{\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{Z} :\ 0 \leqslant x \leqslant 7\}}$.

Regla de Asignación:
Por definición, se tendrá que $f \circ g(x) = f[g(x)]$. Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= 1 - 3[g(x)] \\ &= 1 - 3(2x + 1) \\ &= 1 - 6x - 3 \\ f \circ g(x) &= -6x - 2 \end{aligned}$$

Recorrido:
En este caso, podemos expresar el recorrido mediante las propiedades que deben cumplir sus elementos; es decir: $\boxed{\mathrm{Rec}(f \circ g) = \{y \in \mathbb{Z} :\ \exists x \in \mathbb{Z}(0 \leqslant x \leqslant 7)\ \wedge\ y = -6x - 2\}}$.

En este caso, este recorrido tendrá 8 elementos, por lo que es posible escribir el conjunto por extensión ($\mathrm{Rec}(f \circ g) = \{-2, -8, -14, -20, -26, -32, -38, -44\}$) ; sin embargo, cuando se tengan (en el futuro) muchos elementos (150 o, más aún, infinitos), la escritura por extensión no será conveniente $\square$.

1. c. <u>Dominio:</u>

Para determinarlo, partimos considerando que aquellos elementos de $\mathrm{Rec}(g)$ que también sean parte de $\mathrm{Dom}(f)$ serán los que permitirán la existencia de $f \circ g$. Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathrm{Dom}(g)\ \left(2 \leqslant 2 + \frac{1}{x} \leqslant 5\right) \\ \Leftrightarrow\ &\forall x \in \mathrm{Dom}(g)\ \left(0 < \frac{1}{x} \leqslant 3\right) \\ \Leftrightarrow\ &\forall x \in \mathrm{Dom}(g)\ \left(0 < x \wedge x \geqslant \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Luego, el dominio buscado será la intersección entre $\mathrm{Dom}(g)$ y el conjunto recién hallado; es decir, $\boxed{\mathrm{Dom}(f \circ g) = \left\{x \in \mathbb{Q} :\ \frac{1}{2} < x < \frac{10}{3}\right\}}$.

<u>Regla de Asignación:</u>

Por definición, se tendrá que $f \circ g(x) = f[g(x)]$. Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= 1 + \frac{3}{g(x)} = 1 + \frac{3}{2 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{3}{\frac{2x+1}{x}} \\ &= 1 + \frac{3x}{2x+1} = \frac{2x + 1 + 3x}{2x+1} \\ f \circ g(x) &= \frac{5x+1}{2x+1} \end{aligned}$$

<u>Recorrido:</u>

En este caso, a partir del dominio podemos establecer el recorrido:

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathrm{Dom}(g)\ \left(\frac{1}{2} < x < \frac{10}{3}\right) \\ \Longleftrightarrow\ &\forall x \in \mathrm{Dom}(g)\ \left(\frac{3}{10} < \frac{1}{x} < 2\right) \\ \Longleftrightarrow\ &\forall x \in \mathrm{Dom}(g)\ \left(\frac{23}{10} < 2 + \frac{1}{x} < 4\right) \\ \Longleftrightarrow\ &\forall x \in \mathrm{Dom}(g)\ \left(\frac{23}{30} < \frac{2 + \frac{1}{x}}{3} < \frac{4}{3}\right) \\ \Longleftrightarrow\ &\forall x \in \mathrm{Dom}(g)\ \left(\frac{23}{30} < \frac{2x+1}{3x} < \frac{4}{3}\right) \\ \Longleftrightarrow\ &\forall x \in \mathrm{Dom}(g)\ \left(\frac{30}{23} < \frac{3x}{2x+1} < \frac{3}{4}\right) \\ \Longleftrightarrow\ &\forall x \in \mathrm{Dom}(g)\ \left(\frac{53}{23} < \frac{5x+1}{2x+1} < \frac{7}{4}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\boxed{\mathrm{Rec}(f \circ g) = \left\{y \in \mathbb{Q} :\ \frac{53}{23} < y < \frac{7}{4}\right\}}$ $\square$.

2. a. <u>Dominio maximal:</u>

En este caso, buscamos:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \operatorname{Rec}(f)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (\sqrt{3} \leqslant y < 4)\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \left(\sqrt{3} \leqslant \frac{5}{\sqrt{x^2+1}} < 4\right)\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \left(\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{x^2+1}}{5} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \left(\frac{5}{4} < \sqrt{x^2+1} \leqslant \frac{5}{\sqrt{3}}\right)\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \left(\frac{25}{16} < x^2+1 \leqslant \frac{25}{3}\right)\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \left(\frac{9}{16} < x^2 \leqslant \frac{22}{3}\right)\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \left(\frac{3}{4} < x \leqslant \sqrt{\frac{22}{3}} \ \vee \ -\sqrt{\frac{22}{3}} \leqslant x < \frac{-3}{4}\right)\right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el dominio buscado será $\boxed{\operatorname{Dom}(f) = \left[-\sqrt{\frac{22}{3}}; \frac{-3}{4}\right[\ \cup \ \left]\frac{3}{4}; \sqrt{\frac{22}{3}}\right]}$.

b. <u>Recorrido:</u>

Como la función fue construida a propósito para cumplir con el codominio dado, se tiene que $\boxed{\operatorname{Rec}(f) = \left[\sqrt{3}; 4\right[}$.

c. <u>Biyectividad:</u>

Como la función fue construida a propósito para cumplir con el codominio dado, se tiene de inmediato que f es sobreyectiva.

Ahora bien, para verificar que f es inyectiva, debemos fijarnos en tres casos posibles:

Caso 1: $x_1, x_2 \in \left[-\sqrt{\frac{22}{3}}; \frac{-3}{4}\right[$

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2)} \implies \frac{5}{\sqrt{{x_1}^2+1}} = \frac{5}{\sqrt{{x_2}^2+1}} \implies \sqrt{{x_1}^2+1} = \sqrt{{x_2}^2+1} \implies {x_1}^2+1 = {x_2}^2+1$$
$$\implies {x_1}^2 = {x_2}^2 \underset{x_2<0}{\overset{x_1<0}{\implies}} -x_1 = -x_2 \implies \boxed{x_1 = x_2}$$

Caso 2: $x_1, x_2 \in \left]\frac{3}{4}; \sqrt{\frac{22}{3}}\right]$

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2)} \implies \frac{5}{\sqrt{{x_1}^2+1}} = \frac{5}{\sqrt{{x_2}^2+1}} \implies \sqrt{{x_1}^2+1} = \sqrt{{x_2}^2+1} \implies {x_1}^2+1 = {x_2}^2+1$$
$$\implies {x_1}^2 = {x_2}^2 \underset{x_2>0}{\overset{x_1>0}{\implies}} \boxed{x_1 = x_2}$$

Caso 3: $x_1 \in \left[-\sqrt{\dfrac{22}{3}}; \dfrac{-3}{4}\right[$, $x_2 \in \left]\dfrac{3}{4}; \sqrt{\dfrac{22}{3}}\right]$

Por contraejemplo, sea $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. Con esos valores se tiene:

$$f(x_1) = \frac{5}{\sqrt{(-1)^2+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad f(x_2) = \frac{5}{\sqrt{(1)^2+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto, con el dominio dado, f no será inyectiva (y menos biyectiva).

Para corregir el problema, bastará con considerar una sola de las ramas dadas al inicio, pues en cada una de ellas por separado, se tiene que f será inyectiva (y, por lo tanto, biyectiva). Sin perder generalidad, elegiremos la rama positiva; es decir:

$$g : \left]\frac{3}{4}; \sqrt{\frac{22}{3}}\right] \longrightarrow \left[\sqrt{3}; 4\right[\ , \ g(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2+1}}$$

d. Inversa de g:

Obviamente, calcularemos la inversa de g, pues ella sí es biyectiva. Para ello, partimos de $y = g(x)$ y despejamos x, con lo que obtendremos $x = g^{-1}(y)$:

$$\boxed{y = \frac{5}{\sqrt{x^2+1}}} \implies \frac{5}{y} = \sqrt{x^2+1} \implies \frac{25}{y^2} = x^2+1 \implies \frac{25}{y^2} - 1 = x^2 \overset{x>0}{\implies} \boxed{\sqrt{\frac{25}{y^2}-1} = x}$$

Por lo tanto, la función inversa de g será $\boxed{g^{-1} : \left[\sqrt{3}; 4\right[\longrightarrow \left]\dfrac{3}{4}; \sqrt{\dfrac{22}{3}}\right] \ , \ g^{-1}(y) = \sqrt{\dfrac{25}{y^2}-1}}$ $\square$.