22202 Álgebra I – Ayudantía 07

Dominio, Recorrido y Álgebra de Funciones

Viernes 08 de Enero de 2021

7.1. Ejercicios propuestos

1. Para las siguientes funciones, determinar si existe la imagen de 4. Si existe, calcularla y si no, justificar por qué no existe:

a. $f : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = x + 1$

b. $g : [3,7] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \dfrac{1}{8 - x}$

2. Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones determinan a la variable "y" como función de la variable "x". Para aquellas en que no sea posible, restringir cada variable a un intervalo en que sí sea posible:

a. $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$

b. $x^2 - y^2 = 1$

c. $x^2 + y^2 = 1$

3. Si $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ **, determinar el dominio y la imagen (recorrido) más amplios para** f**.**

4. Si $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ **, determinar el dominio y la imagen (recorrido) más amplios para** f**.**

5. Determinar la imagen (recorrido) para $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ **.**

6. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$ **y** $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$ **, determinar las siguientes funciones y su respectivo dominio:**

a. $f + g$

b. $f \cdot g$

c. f/g

7. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 20$ **y** $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 2/x & \text{si } 1 \leqslant x < 4 \\ 3 & \text{si } 4 \leqslant x \end{cases}$ **, determinar las siguientes funciones y su respectivo dominio:**

a. $f + g$

b. $f \cdot g$

c. f/g

7.2. Una solución para los Ejercicios

1. Para las siguientes funciones, determinar si existe la imagen de 4. Si existe, calcularla y si no, justificar por qué no existe:

a. $f : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = x + 1$

b. $g : [3, 7] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \dfrac{1}{8 - x}$

Solución: Una función asocia a un elemento x (preimagen) otro valor $f(x)$ (imagen), ***siempre y cuando** x **pertenezca al conjunto de partida*** (dominio).

Es decir, $f : \text{Dom}(f) \longrightarrow \text{Cod}(f)$ y $f(x)$ existe siempre y cuando $x \in \text{Dom}(f)$.

Para a.

Vemos que el dominio de la función es $\text{Dom}(f) = [1, 2]$ y que $4 \notin \text{Dom}(f)$; luego, ***no es posible calcular la imagen de 4*** (no existe $f(4)$).

Para b.

Vemos que $\text{Dom}(f) = [3, 7]$ y que $4 \in \text{Dom}(f)$; luego, ***existe*** $f(4)$:

$$f(x) = \frac{1}{8 - x} \implies f(4) = \frac{1}{8 - 4} = \frac{1}{4} \quad \square\ .$$

2. Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones determinan a la variable "y" como función de la variable "x". Para aquellas en que no sea posible, restringir cada variable a un intervalo en que sí sea posible:

a. $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$

b. $x^2 - y^2 = 1$

c. $x^2 + y^2 = 1$

Solución:

Para determinar y como función de x, debemos ordenar esta ecuación de tal forma de despejar y (con ello, diremos que $y = f(x)$, lo cual nos daría la regla de asignación de f).

Para a.

$$y^2 - 6y - 8x + 17 = 0 \implies (y^2 - 6y + 9) - 9 - 8x + 17 = 0 \implies (y - 3)^2 = 8x - 8$$

$$\implies (y - 3)^2 = 8(x - 1) \implies \boxed{(y - 3)^2 = 4(2)(x - 1)}$$

En este paso, lo que seguiría es aplicar raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación; sin embargo, debemos asegurarnos de que es posible hacerlo.

Vemos que ***un número elevado al cuadrado siempre es positivo o cero*** (en este caso, $(y - 3)^2 \geqslant 0$); luego, como el lado derecho es igual al lado izquierdo, entonces también debe ser positivo o cero. En este caso, **estamos haciendo una RESTRICCIÓN al dominio**:

$$8(x - 1) \geqslant 0 \implies x - 1 \geqslant 0 \implies \boxed{x \geqslant 1}$$

Es decir, $\boxed{\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}}$ (| : tal que)

Con esto, ya determinamos todos los valores de x para los que es posible sacar raíz cuadrada; sin embargo, aún falta por determinar cuál es la raíz cuadrada del lado izquierdo.

Cuando uno calcula $\sqrt{(4)^2}$, rápidamente simplificamos el cuadrado con la raíz y decimos $\sqrt{(4)^2} = (4)$; sin embargo, si hiciéramos lo mismo para $\sqrt{(-4)^2}$, diríamos que $\sqrt{(-4)^2} = (-4)$, lo cual es falso. Entonces, se dice que la raíz cuadrada se comporta de la siguiente manera:

- Si $x \geqslant 0$, entonces $\sqrt{x^2} = x$. Ejemplo: $\sqrt{(4)^2} = 4$, $\sqrt{(0)^2} = 0$.
- Si $x \leqslant 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$. Ejemplo: $\sqrt{(-4)^2} = -(-4) = 4$, $\sqrt{(0)^2} = -(0) = 0$.

  Aplicando lo anterior a la expresión $(y-3)^2$, tenemos **DOS CASOS**:

- Si $y - 3 \geqslant 0$, entonces $\sqrt{(y-3)^2} = y - 3$.
- Si $y - 3 \leqslant 0$, entonces: $\sqrt{x^2} = -(y-3) = -y + 3 = 3 - y$.

  Ahora, contemplando la restricción para x y los dos casos para y, se obtiene:

- Si $x \geqslant 1$ e $y - 3 \geqslant 0$:

$$\sqrt{(y-3)^2} = \sqrt{8(x-1)} \implies y - 3 = 2\sqrt{2}\sqrt{x-1} \implies \boxed{y = 2\sqrt{2}\sqrt{x-1} + 3}$$

- Si $x \geqslant 1$ e $y - 3 \leqslant 0$:

$$\sqrt{(y-3)^2} = \sqrt{8(x-1)} \implies 3 - y = 2\sqrt{2}\sqrt{x-1} \implies \boxed{y = 3 - 2\sqrt{2}\sqrt{x-1}}$$

Para b.

Procediendo por analogía al caso anterior, se tiene:

$$x^2 - y^2 = 1 \implies y^2 = x^2 - 1$$

Restricción al dominio: $x^2 - 1 \geqslant 0 \implies (x+1)(x-1) \geqslant 0 \implies \begin{cases} x + 1 \geqslant 0 & \wedge \;\; x - 1 \geqslant 0 \\ & \vee \\ x + 1 \leqslant 0 & \wedge \;\; x - 1 \leqslant 0 \end{cases}$

$$\implies \begin{cases} x \geqslant -1 & \wedge \;\; x \geqslant 1 \\ & \vee \\ x \leqslant -1 & \wedge \;\; x \leqslant 1 \end{cases} \implies \boxed{x \geqslant 1 \;\; \vee \;\; x \leqslant -1} \implies \boxed{\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1 \;\vee\; x \leqslant -1\}}$$

Casos:

- Si $y \geqslant 0$, entonces $\sqrt{y^2} = y$.
- Si $y < 0$, entonces $\sqrt{y^2} = -y$.

  Contemplando la restricción y los casos, se obtiene:

- Si $x \geqslant 1 \vee x \leqslant -1$, y además $y \geqslant 0$:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{x^2 - 1} \implies \boxed{y = \sqrt{x^2 - 1}}$$

- Si $x \geqslant 1 \vee x \leqslant -1$, y además $y \leqslant 0$:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{x^2 - 1} \implies -y = \sqrt{x^2 - 1} \implies \boxed{y = -\sqrt{x^2 - 1}}$$

Para c. Procediendo por analogía al caso anterior, se tiene:

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1 \implies y^2 = 1 - x^2}$$

Restricción al dominio: $1 - x^2 \geqslant 0 \implies (1+x)(1-x) \geqslant 0 \implies \begin{cases} 1 + x \geqslant 0 & \wedge \;\; 1 - x \geqslant 0 \\ & \vee \\ 1 + x \leqslant 0 & \wedge \;\; 1 - x \leqslant 0 \end{cases}$

$$\implies \begin{cases} x \geqslant -1 & \wedge \;\; 1 \geqslant x \text{ (solución } -1 \leqslant x \leqslant 1) \\ & \vee \\ x \leqslant -1 & \wedge \;\; 1 \leqslant x \text{ (no tiene solución)} \end{cases} \implies \boxed{\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}}$$

Casos:

- Si $y \geqslant 0$, entonces $\sqrt{y^2} = y$.
- Si $y < 0$, entonces $\sqrt{y^2} = -y$.

Contemplando la restricción y los casos, se obtiene:

- Si $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $y \geqslant 0$: $\quad \sqrt{y^2} = \sqrt{1-x^2} \implies \boxed{y = \sqrt{1-x^2}}$
- Si $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $y \leqslant 0$:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{1-x^2} \implies -y = \sqrt{1-x^2} \implies \boxed{y = -\sqrt{1-x^2}}$$

3. Si $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$, determinar el dominio y la imagen (recorrido) más amplios para f.

Solución: El dominio más amplio (dominio máximo o maximal) corresponde al conjunto de todos los elementos x para los que $f(x)$ está "bien definida" (es decir, $f(x) \in \mathrm{Cod}(f)$).

Escrito como conjunto, se tiene $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathrm{Cod}(f)\}$.

En el problema, vemos que:

$$\mathrm{Dom}(f) \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \ = \ \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x+3} \in \mathbb{R}\right\} \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid x+3 \neq 0\} \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$$

$$\implies \boxed{\mathrm{Dom}(f) =]-\infty, -3[\ \cup \ ]-3, +\infty[\ = \ \mathbb{R} - \{-3\}}$$

Luego, el recorrido (más amplio) corresponde al conjunto de todos los elementos $f(x)$ para los que x esté en el dominio recién encontrado.

Escrito como conjunto, se tiene $\mathrm{Rec}(f) = \{y \in \mathrm{Cod}(f) \mid y = f(x)\ ,\ x \in \mathrm{Dom}(f)\}$.

En el problema, vemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rec}(f) &= \left\{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{x-1}{x+3} \ \wedge \ x \neq -3\right\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid y(x+3) = x-1 \ \wedge \ x \neq -3\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid xy + 3y = x - 1 \ \wedge \ x \neq -3\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid x - xy = 3y + 1 \ \wedge \ x \neq -3\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid x(1-y) = 3y+1 \ \wedge \ x \neq -3\} \ = \ \left\{y \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3y+1}{1-y} \ \wedge \ x \neq -3 \ \wedge \ y \neq 1\right\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1\}
\end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\mathrm{Rec}(f) =]-\infty, 1[\ \cup \ ]1, +\infty[\ = \ \mathbb{R} - \{1\}} \quad \square\,.$$

4. Si $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ **, determinar el dominio y la imagen (recorrido) más amplios para** f**.**

Solución:

$$\mathrm{Dom}(f) \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \ = \ \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{x-2} \in \mathbb{R}\right\} \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 \neq 0\} \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$$

$$\Longrightarrow \ \boxed{\mathrm{Dom}(f) =]-\infty, 2[\, \cup \,]2, +\infty[\, = \ \mathbb{R} - \{2\}}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rec}(f) &= \left\{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{x}{x-2} \ \wedge \ x \neq 2\right\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid y(x-2) = x \ \wedge \ x \neq 2\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid xy - 2y = x \ \wedge \ x \neq 2\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid xy - x = 2y \ \wedge \ x \neq 2\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid x(y-1) = 2y \ \wedge \ x \neq 2\} \ = \ \left\{y \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2y}{y-1} \ \wedge \ x \neq 2 \ \wedge \ y \neq 1\right\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1\}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \ \boxed{\mathrm{Rec}(f) =]-\infty, 1[\, \cup \,]1, +\infty[\, = \ \mathbb{R} - \{1\}} \quad \square \, .$$

5. Determinar la imagen (recorrido) para $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Solución:

En primer lugar, debemos notar que $\mathrm{Dom}(f)$ corresponderá a todos los valores de x contemplados en los casos; es decir, $\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}}$.

Dado que la función está definida por casos (también llamados ***tramos***), debemos analizar ambos **CASOS** por separado:

- Si $x > 0$, entonces $f_1(x) = x^2 + 1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rec}(f_1) &= \{y \in \mathbb{R} \mid y = x^2 + 1 \, , \ x > 0\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid y - 1 = x^2 \, , \ x > 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} \mid \sqrt{y-1} = x \, , \ x > 0 \, , \ y - 1 > 0\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Rec}(f_1) =]1, +\infty[}$$

- Si $x \leqslant 0$, entonces $f_2(x) = 2x - 3$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rec}(f_2) &= \{y \in \mathbb{R} \mid y = 2x - 3 \, , \ x \leqslant 0\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid y + 3 = 2x \, , \ x \leqslant 0\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} \mid \frac{y+3}{2} = x \, , \ x \leqslant 0 \, , \ y + 3 \leqslant 0\right\} \ = \ \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -3\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Rec}(f_2) =]-\infty, -3]}$$

Luego, el recorrido se obtiene considerando ambos casos; es decir:

$$\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Rec}(f_1) \ \cup \ \mathrm{Rec}(f_2) \ \Longrightarrow \ \boxed{\mathrm{Rec}(f) =]-\infty, -3] \ \cup \ [1, +\infty[} \quad \square \, .$$

6. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$ **y** $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$ **, determinar las siguientes funciones y su respectivo dominio:**

a. $f + g$ b. $f \cdot g$ c. f/g

Solución:

El dominio de cualquier "mezcla" de dos funciones corresponde al conjunto en que ambas funciones estén bien definidas; esto se logra con la intersección de los dominios de ambas funciones.

En este caso, vemos que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

Para a.

$$\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \implies (f+g)(x) = (2x+1) + (x^2-1) \implies \boxed{(f+g)(x) = x^2 + 2x}$$

Para b.

$$\mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \implies (f \cdot g)(x) = (2x+1)(x^2-1) \implies \boxed{(f \cdot g)(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1}$$

Para c. Aquí se debe hacer una **RESTRICCIÓN al dominio**, ya que $g(x) \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(f/g) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{Dom}(f) \ \wedge \ x \in \mathrm{Dom}(g) \ \wedge \ g(x) \neq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{Dom}(f) \ \wedge \ x \in \mathrm{Dom}(g) \ \wedge \ x^2 - 1 \neq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{Dom}(f) \ \wedge \ x \in \mathrm{Dom}(g) \ \wedge \ (x+1)(x-1) \neq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{Dom}(f) \ \wedge \ x \in \mathrm{Dom}(g) \ \wedge \ x \neq -1 \ \wedge \ x \neq 1\} \\
&=]-\infty, -1[\ \cup\ ]-1, 1[\ \cup\ ]1, +\infty[\\
&= \mathbb{R} - \{-1, 1\}
\end{aligned}$$

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \implies (f/g)(x) = \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)} \implies \boxed{(f/g)(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}} \quad \square\,.$$

7. Si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=3x-20$ **y** $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}2x & \text{si } 0\leqslant x<1\\ 2/x & \text{si } 1\leqslant x<4\\ 3 & \text{si } 4\leqslant x\end{cases}$ **, determinar las siguientes funciones y su respectivo dominio:**

a. $f+g$ b. $f\cdot g$ c. f/g

Solución:

Vemos que $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g)=[0,+\infty[$ (dado por los tramos de g).

Para a.

$$\mathrm{Dom}(f+g)=\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)=[0,+\infty[$$

Cabe destacar que cuando la “mezcla” de funciones se calcula para funciones por tramos, se debe hacer la operación tramo por tramo; es decir:

$$(f+g)(x)=\begin{cases}(3x-20)+(2x) & \text{si } 0\leqslant x<1\\ (3x-20)+(2/x) & \text{si } 1\leqslant x<4\\ (3x-20)+(3) & \text{si } 4\leqslant x\end{cases}\implies \boxed{(f+g)(x)=\begin{cases}5x-20 & \text{si } 0\leqslant x<1\\ \dfrac{3x^2-20x+2}{x} & \text{si } 1\leqslant x<4\\ 3x-17 & \text{si } 4\leqslant x\end{cases}}$$

Para b.

$$\mathrm{Dom}(f\cdot g)=\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)=[0,+\infty[$$

$$(f\cdot g)(x)=\begin{cases}(3x-20)(2x) & \text{si } 0\leqslant x<1\\ (3x-20)(2/x) & \text{si } 1\leqslant x<4\\ (3x-20)(3) & \text{si } 4\leqslant x\end{cases}\implies \boxed{(f\cdot g)(x)=\begin{cases}6x^2-40x & \text{si } 0\leqslant x<1\\ 6-\dfrac{40}{x} & \text{si } 1\leqslant x<4\\ 9x-60 & \text{si } 4\leqslant x\end{cases}}$$

Para c.

Restricción al dominio: $g(x)\neq 0 \implies \begin{cases}2x\neq 0 & \text{si } 0\leqslant x<1\\ 2/x\neq 0 & \text{si } 1\leqslant x<4\\ 3\neq 0 & \text{si } 4\leqslant x\end{cases}\implies \boxed{x\neq 0}$

$$\implies \mathrm{Dom}(f/g)=\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)-\{0\}=]0,+\infty[$$

$$(f/g)(x)=\begin{cases}(3x-20)/(2x) & \text{si } 0<x<1\\ (3x-20)/(2/x) & \text{si } 1\leqslant x<4\\ (3x-20)/(3) & \text{si } 4\leqslant x\end{cases}\implies \boxed{(f/g)(x)=\begin{cases}(3/2)-(10/x) & \text{si } 0<x<1\\ (3/2)x^2-10x & \text{si } 1\leqslant x<4\\ x-(20/3) & \text{si } 4\leqslant x\end{cases}}\quad \square\,.$$