22202 Álgebra I – Ayudantía 06

# Equivalencia y Orden

*Martes 29 de Diciembre de 2020*

**Previo: Conjuntos v/s elementos (objetos matemáticos)**

**A = {1,2,3,{2},{1,2},{2,3},{1,2,3}}**

Elementos: 1 en A , 2 en A, 3 en A, {2} en A, {1,2} en A, {2,3} en A, {1,2,3} en A

Un elemento pertenece a un conjunto si:

Está explícitamente dentro del conjunto (aparece): Extensión.

Cumple con la propiedad (proposición, condición) que define al conjunto: Comprensión.

{2} en A. Cierto, pues, {2} aparece entre los elementos de A.

{2} subconjunto de A, pues 2 está en A.

(Potencia de A) P(A): conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A.

{2} en P(A)

{1,2} en A

{1,2} subconjunto de A, pues 1 en A y 2 en A.

{1,2} en P(A)

**6.1 Relación de Equivalencia**

Si A es vacío,

A x B = vacío ssi A=vacío v B=vacío

A x B <> vacío ssi A<>vacío ^ B<> vacío

Para poder definir relaciones, debe ocurrir que los conjuntos sean no vacíos.

**Sea A conjunto no vacío, y R relación en A x A.** **a R b ssi (a,b) en R**

**R refleja: PARA TODO x en A (a R a) ssi (a,a) en R.**

**R simétrica: (a,b) en R ==> (b,a) en R** **aRb ==> bRa**

**R transitiva: (a,b) en R ^ (b,c) en R ==> (a,c) en R** **aRb ^ bRc ==> aRc**

**6.2 Relación de Orden**

**R antisimétrica: (a,b) en R ^ (b,a) en R ==> a=b**

**Ej: A={1,2,3,4}**

**R={(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(4,1);(4,2)(4,3);(4,4)}**

**R refleja, simétrica y transitiva ==> R es de equivalencia.**

**Ej: A={1,2,3,4}**

**R={(1,1);(1,2);(1,3);(2,2);(2,3);(3,3);(4,2);(4,3);(4,4)}**

**R refleja, antisimétrica y transitiva ==> R es de orden (parcial)**

**R es orden total ssi R es de orden parcial ^ PARA TODO a, b en A (aRb v bRa)**

**R={(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,2);(2,3);(3,3);(4,2);(4,3);(4,4)}**

### 6.3 Ejercicios

16) Sea R una relación en A. Decimos que: R es conexa $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : aRb \vee bRa$

Demuestre: Si R es simétrica, transitiva y conexa entonces R es de relación de equivalencia.

**R simétrica**

**R transitiva**

**R conexa**

**P.D. R es de equivalencia**

**Dem: R simétrica : (a,b) en R ==> (b,a) en R.**

**R transitiva: (a,b) en R ^ (b,c) en R ==> (a,c) en R.**

**R conexa: PARA TODO a,b en A ( (a,b) en R v (b,a) en R )**

**Como A es no vacío, debe existir al menos un elemento a en A. Como R es conexa, entonces puedo relacionar cualquier par de elementos de A. (incluso si A tienen un solo elemento).**

**Dado a en A. Vemos que si (a,b) en R, como R simétrica, entonces (b,a) en R. Luego, como R es transitiva, (a,a) en R.**

**Como esto es válido para cualquier a, b en A, entonces R es refleja.**

**© EDGARD ALEJANDRO ARAYA CARREÑO** 

**Ejercicios 5.4 y 5.5 Control 2**

**Sean R, S relaciones en $R^2$ tales que R = {(x,y): y=2x} y S = {(x,y): y=2x³}.**

**4. Determinar RoS**

**(x,y) en R ssi y=2x**

**(x,y) en S ssi $y=2x^3$**

**(a,b) en RoS ssi (a,c) en S ^ (c,b) en R**

**ssi $c = 2a^3$ ^ $b = 2c$**

**ssi $b = 2c = 2(2a^3) = 4a^3$**

**R o S = {(a,b) : $b=4a^3$}**

**5. Determinar SoR**

**(x,y) en R ssi y=2x**

**(x,y) en S ssi $y=2x^3$**

**(p,q) en SoR ssi (p,t) en R ^ (t,q) en S**

**ssi $t = 2p$ ^ $q = 2t^3$**

**ssi $q = 2t^3 = 2(2p)^3 = 2(8p^3) = 16p^3$**

**S o R = {(p,q) : $q=16p^3$}**

R = {(x,y) en Z x Z : x – y = 5k, k en Z}

20 R 5 ssi 20 – 5 = 15 = 5·3, 3 en Z.

R es de equivalencia

Clase de equivalencia: [5]_R = {y en Z : y R 5} = {20,5,10,0,-5,-10,-15,-20,…}

[0]_R = {y en Z: y R 0} = {20,5,10,0,-5,-10,-15,-20,…} = [5]_R

[20]_R = [0]_R = [5]_R …

PROPIEDAD TEOREMA: [a]_R = [b]_R ssi a R b

[0]_R = {...,-15,-10,-5,0,5,10,15,...}

[1]_R = {y en Z : y R 1} = {y en Z: y – 1 = 5k, k en Z} = {y en Z: y = 5k+1} = {...,-14,-9,-4,1,6,11,16,…}

[2]_R = {y en Z : y R 2} = {...,-13,-8,-3,2,7,12,17,…}

[3]_R = {y en Z : y R 3} = {...,-12,-7,-2,3,8,13,18,…}

[4]_R = {y en Z : y R 4} = {...,-11,-6,-1,4,9,14,19,…}

[5]_R = [0]_R

[6]_R = [1]_R

PROPIEDADES: 1. Si a<>b, entonces [a]_R inter [b]_R = vacío

2. Unión de todas las clases de equivalencia definidas por R es igual al conjunto A.

**Hola**