22202 Álgebra I - Ayudantía 05

Relaciones y propiedades

Martes 01 de Diciembre de 2020

3. Demostrar las siguientes proposiciones para A, B, C conjuntos:

a. $A \subseteq B \implies \forall C(A \times C \subseteq B \times C)$

b. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

Dem: a. Sean A, B, C conjuntos y suponer que $A \subseteq B$ **.**
Sea $(x,z) \in A \times C \quad \Rightarrow \quad x \in A \wedge z \in C \quad \Rightarrow \quad x \in B \wedge z \in C \quad \Rightarrow \quad (x,z) \in B \times C$
Por lo tanto, $A \subseteq B \Rightarrow \forall C(A \times C \subseteq B \times C)$

b. $P = Q \Leftrightarrow P \subseteq Q \wedge Q \subseteq P \qquad a \in A \cap B \Rightarrow a \in A \wedge a \in B \qquad b \in A^c \Leftrightarrow \sim(b \in A)$

(==>) $(x,w) \in A \times (B - C)$

$\Rightarrow \quad x \in A \wedge w \in (B - C)$

$\Rightarrow \quad x \in A \wedge w \in (B \cap C^c)$

$\Rightarrow \quad x \in A \wedge [w \in B \wedge w \in C^c]$

$\Rightarrow \quad x \in A \wedge [w \in B \wedge w \in C^c]$

$\Rightarrow \quad [x \in A \wedge w \in B] \wedge w \in C^c$

$(\Rightarrow) \quad [x \in A \wedge w \in B] \wedge [w \in C^c \vee x \in A^c]$ **Este paso no es reversible, pues** $p \Rightarrow p \vee q$

$\Rightarrow \quad [x \in A \wedge w \in B] \wedge \ \sim[w \in C \wedge x \in A]$

$\Rightarrow \quad [(x,w) \in A \times B] \wedge \ \sim[(x,w) \in A \times C]$

$\Rightarrow \quad (x,w) \in A \times B \wedge \ (x,w) \in (A \times C)^c$

$\Rightarrow \quad (x,w) \in A \times B \cap (A \times C)^c$

$\Rightarrow \quad (x,w) \in (A \times B) - (A \times C)$ **Por lo tanto,** $A \times (B - C) \subseteq (A - B) \times (A - C)$

(<==) $(x,w) \in (A \times B) - (A \times C)$

$\Rightarrow \quad (x,w) \in (A \times B) \cap (A \times C)^c$

$\Rightarrow \quad (x,w) \in (A \times B) \wedge (x,w) \in (A \times C)^c$

$\Rightarrow \quad [x \in A \wedge w \in B] \wedge (x,w) \in (A \times C)^c$

$\Rightarrow \quad [x \in A \wedge w \in B] \wedge \ \sim[(x,w) \in (A \times C)]$

$\Rightarrow \quad [x \in A \wedge w \in B] \wedge \ \sim[x \in A \wedge w \in C]$

$\Rightarrow \quad [x \in A \wedge w \in B] \wedge [\ \sim(x \in A) \vee \ \sim(w \in C)]$

$\Rightarrow \quad [w \in B \wedge x \in A] \wedge [\ \sim(x \in A) \vee \ \sim(w \in C)]$

$\Rightarrow \quad w \in B \wedge [x \in A \wedge [\ \sim(x \in A) \vee \ \sim(w \in C)]]$

$\Rightarrow \quad w \in B \wedge [(x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge w \notin C)]$

$\Rightarrow \quad w \in B \wedge [(F) \vee (x \in A \wedge w \notin C)]$

$(\Rightarrow) \quad w \in B \wedge (x \in A \wedge w \notin C) \quad \Rightarrow \quad (w \in B \wedge w \notin C) \wedge x \in A \quad \Rightarrow \quad (w \in B - C) \wedge x \in A$

$\Rightarrow \quad (w \in B - C) \wedge x \in A \quad \Rightarrow \quad (x,w) \in A \times (B - C)$ **Por lo tanto,** $(A - B) \times (A - C) \subseteq A \times (B - C)$

Por lo tanto, $A \times (B - C) = (A - B) \times (A - C)$

7. b. $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ (x \geqslant y)\}$

Refleja: Dado $x \in \mathbb{R}$ **, se tiene** $x = x \quad \Rightarrow \quad x \geq x$ **. Por lo tanto, (x,x) en R_2 .**

Simétrica: Dados $x, y \in \mathbb{R}$ **se tiene:**

$$(x, y) \in R_2 \Rightarrow (x \geq y) \Rightarrow (x > y \vee x = y)$$

Suponer que x > y. Luego, y no puede ser mayor ó igual que x (por Tricotomía, ya que es menor).
Por lo tanto, R_2 no es simétrica.

Antisimétrica: Dados $x, y \in \mathbb{R}$ **, se tiene:** $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \Rightarrow q \; es \, T$

$[(x, y) \in R_2 \wedge (y, x) \in R_2] \Rightarrow [x \geq y \wedge y \geq x] \Rightarrow [x = y]$ **. Por lo tanto, R_2 es antisimétrica.**

Transitiva: Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x, y) \in R_2 \wedge (y, z) \in R_2 \Rightarrow [x \geq y \wedge y \geq z] \Rightarrow [x \geq y \geq z] \Rightarrow [x \geq z] \Rightarrow (x, z) \in R_2$$

Por lo tanto, R_2 es transitiva.