

Lógica Proposicional (Parte II)

Edgardo A. Araya C.
Álgebra I - Ay. 02
22/Abr/2019

① Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Determinar el valor de verdad de:

(A) $\exists x \in A \exists y \in A (x + y = 3)$

(B) $\exists x \in A (x + 1 \notin A)$

② Determinar el valor de verdad de:

(A) $\forall x \in \mathbb{R} (5x > 4x)$

(B) $\forall x \in \mathbb{R} (x^2 \geq x)$

(C) $\forall x \in \mathbb{R} (x \geq 0 \Rightarrow x > 0)$

(D) $\exists x \in \mathbb{R} (x \geq 1 \wedge x \leq 1)$

③ Usar un contraejemplo para demostrar que es falso:

(A) $\forall x \in \mathbb{R} (x > 5 \Rightarrow x > 6)$

(B) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (x < y \vee x = y)$

④ Negar las siguientes afirmaciones, simplificando bajo equivalencia lógica:

(A) $\forall x, y \in \mathbb{Q} (xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0))$

(B) $\forall x \in \mathbb{Q} \exists y \in \mathbb{Q} (xy = 1 \Rightarrow x + y = 1)$

(C) $\forall x \in \mathbb{R} (x > 2) \wedge \exists x \in \mathbb{R} (x = 1)$

⑤ Luego de un crimen, se comprobaban los siguientes hechos:

(i) El asesino de don Juan es su sobrino Diego o su hijo Pedro.

(ii) Si Pedro asesinó a su padre, entonces el arma está escondida en la casa.

(iii) Si Diego dice la verdad, entonces el arma no está escondida en la casa.

(iv) Si Diego miente, entonces él se encontraba en casa a la hora del crimen.

(v) Diego no estaba en la casa a la hora del crimen.

¿Quién es el asesino?

Soluciones:

① $A = \{1, 2, 3\}$.

Ⓐ $\exists x \in A \exists y \in A (x+y=3)$

Verdadero, pues basta con $x=2$ e $y=1$.

Ⓑ $\exists x \in A (x+1 \notin A)$

Verdadero, pues basta con $x=3$.

② Ⓐ $\forall x \in \mathbb{R} (5x > 4x)$

Falso, pues $5x > 4x \Leftrightarrow 5x - 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
Entonces, basta con $x=0$.

Ⓑ $\forall x \in \mathbb{R} (x^2 \geq x)$.

Falso, pues $x^2 \geq x \Leftrightarrow x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \vee x \geq 1$
 $\Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge x \geq 1) \vee (x \leq 0 \wedge x \leq 1)$

Ⓒ $\forall x \in \mathbb{R} (x \geq 0 \Rightarrow x > 0)$

Falso, pues $x=0$ cumple $x \geq 0$ y no $x > 0$.

Ⓓ $\exists x \in \mathbb{R} (x \geq 1 \wedge x \leq 1)$

Verdadero, pues $x=1$ satisface lo pedido.

③ Ⓐ $\forall x \in \mathbb{R} (x > 5 \Rightarrow x > 6)$

Sea $x=11/2$. Este valor es tal que $x > 5$ y $x \leq 6$. Luego, la afirmación es falsa.

Ⓑ $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (x < y \vee x = y)$

Sea $x=3$ e $y=2$. Se tiene en este caso $x > y$. Luego, la afirmación es falsa.

④ Ⓐ $\sim (\forall x, y \in \mathbb{Q} (xy=0 \Rightarrow (x=0 \vee y=0)))$

$\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{Q} (\sim (xy=0 \Rightarrow (x=0 \vee y=0)))$

$\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{Q} (xy=0 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0)$

$$\textcircled{b} \sim (\forall x \in \mathbb{Q} \exists y \in \mathbb{Q} (xy=1 \Rightarrow x+y=1))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : \forall y \in \mathbb{Q} (\sim (xy=1 \Rightarrow x+y=1))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Q} : \forall y \in \mathbb{Q} (xy=1 \wedge x+y \neq 1) //$$

$$\textcircled{c} \sim (\forall x \in \mathbb{R} (x > 2) \wedge \exists x \in \mathbb{R} (x=1))$$

$$\Leftrightarrow \sim (\forall x \in \mathbb{R} (x > 2)) \vee \sim (\exists x \in \mathbb{R} (x=1))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} (\sim (x > 2)) \vee \forall x \in \mathbb{R} (\sim (x=1))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} (x \leq 2) \vee \forall x \in \mathbb{R} (x \neq 1) //$$

5) Definiremos primero las proposiciones a usar:

$p \equiv$ El asesino de don Juan es Diego.

$q \equiv$ El asesino de don Juan es Pedro.

$r \equiv$ El arma está escondida en la casa.

$s \equiv$ Diego estaba en la casa a la hora del crimen.

$t \equiv$ Diego dice la verdad.

Entonces será verdadero que:

$$\textcircled{i} p \vee q \quad \textcircled{ii} q \Rightarrow r \quad \textcircled{iii} t \Rightarrow \sim r \quad \textcircled{iv} \sim t \Rightarrow s \quad \textcircled{v} \sim s$$

* Como $\sim s$ es verdadero, entonces s es falsa.

* Como s es falsa y $\sim t \Rightarrow s$ verdadero, entonces $\sim t$ es falso; luego, t es verdadero.

* Como t es verdadero y $t \Rightarrow \sim r$ verdadero, entonces $\sim r$ es verdadero; luego, r es falsa.

* Como r es falsa y $q \Rightarrow r$ verdadero, entonces q es falsa.

* Como q es falsa y $p \vee q$ verdadero, se concluye p verdadero.

Por lo tanto, el asesino de don Juan es Diego. //