Edgard A. Araya C.
Álgebra I - Ay. 01
15/Abr/2019

Lógica Proposicional

① Traduzca a proposiciones lógicas las siguientes afirmaciones:

Ⓐ Existe un número entero mayor que 2.

Ⓑ La suma de dos números naturales es mayor que cada uno de ellos.

Ⓒ No siempre la resta de dos números naturales es un número natural.

Ⓓ Si existen números racionales que sean positivos y negativos a la vez, entonces existen números naturales que son pares e impares a la vez (no se complique con "par" e "impar").

② Sabiendo que p, q, r son proposiciones verdaderas, determine el valor de verdad de:

Ⓐ $p \wedge (q \vee \sim r)$ Ⓑ $(p \wedge q) \vee \sim(p \wedge r)$ Ⓒ $\sim p \vee (\sim p \wedge (q \vee r))$

③ Probar que las siguientes proposiciones no siempre son verdaderas:

Ⓐ $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

Ⓑ $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

④ Demostrar las siguientes tautologías (sin usar tablas):

Ⓐ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

Ⓑ $(p \Rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \Rightarrow r)$

Ⓒ $\sim(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p))$

⑤ Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Determinar el valor de verdad de:

Ⓐ $\forall x \in A \ (x > 1 \Rightarrow x = 2)$.

Ⓑ $\exists x \in A \ (x > 2 \wedge x^2 \neq 3)$.

Ⓒ $\forall x \in A \ \exists y \in A \ (y > x)$

Ⓓ $\forall x \in A \ \forall y \in A \ (x + y \in A)$.

Soluciones:

① Ⓐ $\exists x \in \mathbb{Z} \ (x > 2)$.

Ⓑ $\forall x \in \mathbb{N} \ \forall y \in \mathbb{N} \ (x+y > x \wedge x+y > y)$.

Ⓒ $\sim(\forall x \in \mathbb{N} \ \forall y \in \mathbb{N} \ (x-y \in \mathbb{N}))$ o bien $\exists x \in \mathbb{N} \ \exists y \in \mathbb{N} \ (x-y \notin \mathbb{N})$

Ⓓ $\exists x \in \mathbb{Q} \ (x > 0 \wedge x < 0) \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N} \ (y \text{ par} \wedge y \text{ impar})$

② Ⓐ $p \wedge (q \vee \sim r)$

q verdadera
(r verdadera $\Rightarrow \sim r$ falsa) $\Rightarrow (q \vee \sim r)$ verdadera
p verdadera $\Rightarrow p \wedge (q \vee \sim r)$ verdadera //.

Ⓑ $(p \wedge q) \vee \sim(p \wedge r)$

p verdadera
q verdadera $\Rightarrow p \wedge q$ verdadera $\Rightarrow (p \wedge q) \vee \sim(p \wedge r)$ verdadera //.

(p verdadera
r verdadera $\Rightarrow p \wedge r$ verdadera $\Rightarrow \sim(p \wedge r)$ falsa.)

Ⓒ $\sim p \vee (\sim p \wedge (q \vee r))$

p verdadera $\Rightarrow \sim p$ falsa. $\Rightarrow \sim p \wedge (q \vee r)$ falsa

$\Rightarrow \sim p \vee (\sim p \wedge (q \vee r))$ falsa //.

③ Ⓐ $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

Para que sea falsa, ambos lados de $\Leftrightarrow$ deben tener distinto valor de verdad.

$\sim p \Rightarrow \sim q$ será <u>falsa</u> si $\sim p$ verdadera $\Rightarrow p$ falsa
$\sim q$ falsa $\Rightarrow q$ verdadera.

$\Rightarrow (p \Rightarrow q)$ es verdadera $\Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)$ <u>falsa</u> (<u>Verdadera</u>).

$\sim p \Rightarrow \sim q$ será <u>verdadera</u> si
(i) $\sim p$ verdadera $\wedge \sim q$ verdadera
(ii) $\sim p$ falsa $\wedge \sim q$ verdadera
(iii) $\sim p$ falsa $\wedge \sim q$ falsa.

5° (i) $\sim p$ verdadera $\Rightarrow p$ falsa $\Rightarrow (p \Rightarrow q)$ verdadera $\Rightarrow \sim (p \Rightarrow q)$ falsa
$\sim q$ verdadera $\Rightarrow q$ falsa
(Falsa).

(ii) $\sim p$ falsa $\Rightarrow p$ verdadera $\Rightarrow (p \Rightarrow q)$ falsa $\Rightarrow \sim (p \Rightarrow q)$ verd
$\sim q$ verdadera $\Rightarrow q$ falsa
(Verdadera).

(iii) $\sim p$ falsa $\Rightarrow p$ verdadera $\Rightarrow (p \Rightarrow q)$ verdadera $\Rightarrow \sim (p \Rightarrow q)$ falsa
$\sim q$ falsa $\Rightarrow q$ verdadera
(Falsa).

(B) $\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

Basta con aplicar De Morgan sobre el lado izquierdo:

$\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow \boxed{\sim p \vee \sim q \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q}$

Basta con $\sim p$ verdadero y $\sim q$ falso (o viceversa).

$\Rightarrow \boxed{\sim p \vee \sim q}$ verdadero , $\sim p \wedge \sim q$ falso (Falso),

(4) (A) $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$

$p \Rightarrow q$ será falso si p verdadero y q falso.
En tal caso, $\sim p$ falso y q falso, luego, $\sim p \vee q$ falso
(Verdadero).

En cualquier otro caso, $p \Rightarrow q$ es verdadero.
* p verdadero y q verdadero $\Rightarrow \sim p \vee q$ verdadero (Verdadero).
* p falso $\Rightarrow \sim p$ verdadero $\Rightarrow \sim p \vee q$ verdadero (Verdadero).
$\therefore$, es una tautología.

(B) $(p \Rightarrow (q \vee r)) \Longleftrightarrow ((p \wedge \sim q) \Rightarrow r)$

El lado izquierdo será falso si p verdadero, q falso y r falso.
Entonces, $p \wedge \sim q$ verdadero, luego, el lado derecho es falso
(Verdadero).

En cualquier otro caso, el lado izquierdo es verdadero.
* p falso $\Rightarrow p \wedge \sim q$ falso $\Rightarrow$ lado derecho verdadero.
* r verdadero $\Rightarrow$ lado derecho verdadero. (Verdadero)
* q verdadero $\Rightarrow \sim q$ falso $\Rightarrow$ lado derecho verdadero.

ⓒ $\sim(p \Leftrightarrow q) \Longleftrightarrow ((p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p))$

p, q igual valor $\Rightarrow$ lado izq. Falso

$\Rightarrow$ $p \wedge \sim q$ Falso, $q \wedge \sim p$ Falso $\Longrightarrow$ lado der. Falso (Verdadero)

p, q distinto valor $\Rightarrow$ lado izq. verdadero.

$\Rightarrow$ $p \wedge \sim q$ verdadero, $q \wedge \sim p$ verdadero $\Longrightarrow$ lado der. verdadero (Verdadero)

⑤ $A = \{1, 2, 3\}$

Ⓐ $\forall x \in A \ (x > 1 \Rightarrow x = 2)$

Falso, pues existe $x = 3$ y cumple $x > 1$ pero $x \neq 2$.

Ⓑ $\exists x \in A \ (x > 2 \wedge x^2 \neq 3)$

Verdadero, pues existe $x = 3$ y cumple $x > 2$ y $x^2 = 9 \neq 3$.

ⓒ $\forall x \in A \ \exists y \in A \ (y > x)$

Falso, pues para $x = 3$ no existe $y \in A$ tal que $y > x$.

Ⓓ $\forall x \in A \ \forall y \in A \ (x + y \in A)$.

Falso, pues $x = 3$ e $y = 1$ son tales que $x + y = 4 \notin A$.