22202 Álgebra I – Edgard A. Araya C.

Una solución de la PEP 1

Lunes 16 de Noviembre de 2020

Pregunta 1

1. Usando una tabla de verdad, muestre que la proposición es una equivalencia:
$(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \wedge \sim r)]$

Solución:

p	q	r	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \wedge \sim r)$	FINAL
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

Como la proposición es Tautología, se concluye que es una equivalencia. □.

2. Usando una tabla de verdad, muestre que la proposición es una equivalencia:
$[p \Rightarrow (q \vee r)] \Longleftrightarrow [\sim (q \vee r) \Rightarrow (\sim p)]$

Solución:

p	q	r	$\sim p$	$q \vee r$	$\sim (q \vee r)$	IZQ	DER	FINAL
V	V	V	F	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V	V

Como la proposición es Tautología, se concluye que es una equivalencia. □.

3. Demuestre que la proposición siguiente es una tautología, usando Tabla de Verdad:
$([(\sim p \vee q) \Rightarrow r] \wedge [r \Rightarrow (s \vee t)] \wedge [\sim s \wedge \sim u] \wedge [\sim u \wedge \sim t]) \Longrightarrow p$

Solución: Hacer la Tabla de Verdad así tal cual implicaría tener 64 casos posibles (es decir, una Tabla con 64 filas). Por ello, para poder dar respuesta, se estudiarán los casos sin Tabla.

Para que la proposición sea F, debe ocurrir que el lado izquierdo sea V y $\boxed{p \text{ sea F}}$. Luego, como en el lado izquierdo todas son conjunciones, todas deben ser verdaderas. Es decir:

(1) $[(\sim p \vee q) \Rightarrow r]$ debe ser V.

(2) $[r \Rightarrow (s \vee t)]$ debe ser V.

(3) $[\sim s \wedge \sim u]$ debe ser V.

(4) $[\sim u \wedge \sim t]$ debe ser V.

De (3) y (4) se obtiene que $[\sim s \wedge \sim u \wedge \sim t]$ debe ser V. De esta última proposición, se obtiene que $\boxed{s \text{ es F}}$, $\boxed{u \text{ es F}}$ y $\boxed{t \text{ es F}}$.

De (1) y (2) se obtiene, por Transitividad, que $[(\sim p \vee q) \Rightarrow (s \vee t)]$ debe ser V. Como ya sabemos los valores de p, s, t, se obtiene que $(s \vee t)$ es F, por lo que $(\sim p \vee q)$ está obligada a ser F. Esto no ocurrirá, puesto que $\sim p$ es V.

Como el valor de r no es relevante, entonces se tienen 32 casos (y no 64, como al inicio). Hemos demostrado que en todos los casos posibles, la proposición es V.

Por lo tanto, la proposición dada es una tautología $\square$.

Se muestra a continuación la Tabla para quienes la hicieron:

p	q	r	s	t	u	$\sim p$	$\sim s$	$\sim t$	$\sim u$	$\sim p \vee q$	$s \vee t$	(1)	(2)	(3)	(4)	IZQ	FINAL
V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V
V	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	F	F	F	V
V	V	V	V	F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V
V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	F	V	F	V
V	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V
V	V	V	F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	V	F	F	V	F	V	V	F	V	F	V	F	F	F	F	V
V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	V	F	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V	F	F	F	F	V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F	V	F	F	F	V
V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F	F	F	F	V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	V	F	F	V	F	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	F	V	V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	F	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V	V	F	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F	F	V	F	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	V	F	V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V

p	q	r	s	t	u	$\sim p$	$\sim s$	$\sim t$	$\sim u$	$\sim p \vee q$	$s \vee t$	(1)	(2)	(3)	(4)	IZQ	FINAL
F	V	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	V	F	F	V	V	V	V	V	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V	V	V	V	F	V	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V	F	F	V	V	V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V	V	V	F	V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	F	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V	V	V	V	F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	V	V	V	V	F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V	F	F	V	V	V	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V	V	V	V	F	V	F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	F	F	V	V	V	F	V

Pregunta 2

1. Muestre, justificando paso a paso (usando propiedades, NO tablas de verdad), que la siguiente proposición es una inferencia lógica:

$\sim([(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (r \Rightarrow s)] \wedge [\sim q \vee \sim s]) \Longrightarrow (p \wedge r)$

Solución:

$$
\begin{array}{lll}
 & \sim([(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (r \Rightarrow s)] \wedge [\sim q \vee \sim s]) & /\ \text{Conmutatividad de } \vee \\
\Longleftrightarrow & \sim([(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (r \Rightarrow s)] \wedge [\sim s \vee \sim q]) & /\ \sim s \vee (\sim q) \equiv s \Rightarrow (\sim q) \\
\Longleftrightarrow & \sim([(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (r \Rightarrow s)] \wedge [s \Rightarrow \sim q]) & /\ \text{Asociatividad de } \wedge \\
\Longleftrightarrow & \sim([\sim q \Rightarrow \sim p] \wedge [(r \Rightarrow s) \wedge (s \Rightarrow \sim q)]) & /\ \text{Transitividad de } \Rightarrow \\
\boxed{\Longrightarrow} & \sim([\sim q \Rightarrow \sim p] \wedge [r \Rightarrow \sim q]) & /\ \text{Conmutatividad de } \wedge \\
\Longleftrightarrow & \sim([r \Rightarrow \sim q] \wedge [\sim q \Rightarrow \sim p]) & /\ \text{Transitividad de } \Rightarrow \\
\boxed{\Longrightarrow} & \sim(r \Rightarrow \sim p) & /\ r \Rightarrow (\sim q) \equiv \sim r \vee (\sim p) \\
\Longleftrightarrow & \sim(\sim r \vee \sim p) & /\ \text{De Morgan para } \wedge \\
\Longleftrightarrow & (r \wedge p) & /\ \text{Conmutatividad de } \wedge \\
\Longleftrightarrow & (p \wedge r) \quad \square\,. &
\end{array}
$$

2. Si para las proposiciones lógicas p y q se define el conectivo lógico $*$ como:

$p * q$ es F si y solo si p y q son V (en cualquier otro caso, $p * q$ es V).

Demuestre, usando propiedades, que la siguiente proposición es una Tautología:

$[(p \Rightarrow q) \vee q] \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) * \sim q]$

Solución: Primero, para utilizar solamente propiedades, hay que establecer alguna equivalencia para $p * q$.

Considerar que $p \wedge q$ cumple con ser V si y solo si p y q son V (en cualquier otro caso, $p \wedge q$ es F). Es decir, con $p \wedge q$ obtenemos el valor de verdad opuesto que con $p * q$.

Con ello, se obtiene $\boxed{p * q \equiv \sim(p \wedge q)}$. Veamos si efectivamente es cierto (Tautología):

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p * q$	FINAL
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Ahora sí, es posible demostrar la proposición usando solamente propiedades. Para esto, partiremos de la proposición de la derecha y, mediante equivalencias, llegaremos a la proposición de la izquierda:

$$
\begin{array}{lll}
 & [(p \wedge \sim q) * \sim q] & /\ a * b \equiv \sim(a \wedge b) \\
\Longleftrightarrow & \sim[(p \wedge \sim q) \wedge \sim q] & /\ \text{De Morgan para } \vee \\
\Longleftrightarrow & [\sim(p \wedge \sim q) \vee \sim(\sim q)] & /\ \text{Doble negación} \\
\Longleftrightarrow & [\sim(p \wedge \sim q) \vee (q)] & /\ \text{De Morgan para } \wedge \\
\Longleftrightarrow & [(\sim p \vee \sim[\sim q]) \vee q] & /\ \text{Doble negación} \\
\Longleftrightarrow & [(\sim p \vee q) \vee q] & /\ \sim p \vee q \equiv p \Rightarrow q \\
\Longleftrightarrow & [(p \Rightarrow q) \vee q] \quad \square\,. &
\end{array}
$$

3. Sean p y q dos proposiciones lógicas. Si definimos el nuevo conectivo lógico:

$p\#q \equiv [(q \wedge p) \Rightarrow (\sim p)] \wedge \sim q$

Entonces demuestre que:

$(q \wedge [p \Rightarrow (p\#q)]) \vee \sim p \equiv \sim p$

Solución: $(q \wedge [p \Rightarrow (p\#q)]) \vee \sim p$ / Definición de $p\#q$

$\Longleftrightarrow [q \wedge (p \Rightarrow \{[(q \wedge p) \Rightarrow (\sim p)] \wedge \sim q\})] \vee \sim p$ / $a \Rightarrow b \equiv \sim a \vee b$

$\Longleftrightarrow [q \wedge (p \Rightarrow \{[\sim (q \wedge p) \vee (\sim p)] \wedge \sim q\})] \vee \sim p$ / De Morgan para $\wedge$

$\Longleftrightarrow [q \wedge (p \Rightarrow \{[(\sim q \vee \sim p) \vee \sim p] \wedge \sim q\})] \vee \sim p$ / Asociatividad de $\vee$

$\Longleftrightarrow [q \wedge (p \Rightarrow \{[\sim q \vee (\sim p \vee \sim p)] \wedge \sim q\})] \vee \sim p$ / $a \vee a \equiv a$

$\Longleftrightarrow [q \wedge (p \Rightarrow \{[\sim q \vee \sim p] \wedge \sim q\})] \vee \sim p$ / Absorción de $\sim p$

$\Longleftrightarrow [q \wedge (p \Rightarrow \{\sim q\})] \vee \sim p$ / $a \Rightarrow b \equiv \sim a \vee b$

$\Longleftrightarrow [q \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee \sim p$ / Distributividad de $\wedge$

$\Longleftrightarrow [(q \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q)] \vee \sim p$ / $a \wedge \sim a \equiv F$

$\Longleftrightarrow [(q \wedge \sim p) \vee F] \vee \sim p$ / $a \vee F \equiv a$

$\Longleftrightarrow [(q \wedge \sim p)] \vee \sim p$ / Absorción de q

$\Longleftrightarrow \sim p \quad \square .$

4. Sean p y q dos proposiciones lógicas. Si definimos los dos nuevos conectivos lógicos:

$p * q \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q) \qquad \wedge \qquad p\#q \equiv (\sim p \wedge q)$

Entonces demuestre que:

$(\sim p * q)\#(\sim q\#p) \equiv p \wedge q$

Solución: $(\sim p * q)\#(\sim q\#p)$ / Definición de $a\#b$

$\Longleftrightarrow \sim (\sim p * q) \wedge (\sim q\#p)$ / Definición de $a\#b$

$\Longleftrightarrow \sim (\sim p * q) \wedge (\sim [\sim q] \wedge p)$ / Definición de $a * b$

$\Longleftrightarrow \sim (\sim [\sim p] \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim [\sim q] \wedge p)$ / Doble negación

$\Longleftrightarrow \sim ([p] \Rightarrow \sim q) \wedge ([q] \wedge p)$ / $a \Rightarrow b \equiv \sim a \vee b$

$\Longleftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q) \wedge (q \wedge p)$ / De Morgan para $\wedge$

$\Longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge (q \wedge p)$ / Conmutatividad de $\wedge$

$\Longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge (p \wedge q)$ / $a \vee a \equiv a$

$\Longleftrightarrow (p \wedge q) \quad \square .$

Pregunta 3

Usted es periodista e investigó la muerte de la Sra. Ximena Pérez, dama de la sociedad nacional. Se logró establecer que las siguientes proposiciones eran verdaderas:
a) El mayordomo o su hijastro asesinó a la Sra. Ximena.
b) Si el mayordomo asesinó a la Sra. Ximena, entonces el asesinato ocurrió a la medianoche o después.
c) Si el testimonio del hijastro es correcto, entonces el asesinato ocurrió antes de la medianoche.
d) Si el testimonio del hijastro es incorrecto, entonces las luces de la casa no se apagaron a la medianoche.
e) Las luces de la casa se apagaron a la medianoche y el mayordomo no es millonario.

i) Usando proposiciones atómicas $p, q, r, \ldots$ traduzca cada una de las proposiciones anteriores a un lenguaje simbólico.
Solución: p: El mayordomo asesinó a la Sra. Ximena.
q: El hijastro asesinó a la Sra. Ximena.
r: El asesinato ocurrió antes de medianoche.
s: El testimonio del hijastro es correcto.
t: Las luces de la casa se apagaron a medianoche.
u: El mayordomo es millonario.

a) $p \vee q$ b) $p \Rightarrow \sim r$ c) $s \Rightarrow r$ d) $\sim s \Rightarrow \sim t$ e) $t \wedge \sim u$

ii) Usando i), deduzca quién es el asesino (para cada simplificación de conectivos compuestos, o argumentar semánticamente o, cuando no es tan fácil, argumentar por Tabla de Verdad).
Solución: Como $t \wedge \sim u$ es V, entonces $\boxed{t \text{ es V}}$ y $\boxed{u \text{ es F}}$. Como t es V, entonces $\sim t$ es F.
Como $\sim s \Rightarrow \sim t$ es V y $\sim t$ es F, entonces $\sim s$ es F, por lo que $\boxed{s \text{ es V}}$.
Como $s \Rightarrow r$ es V y s es V, entonces $\boxed{r \text{ es V}}$, de donde se obtiene que $\sim r$ es F.
Como $p \Rightarrow \sim r$ es V y $\sim r$ es F, entonces $\boxed{p \text{ es F}}$.
Como $p \vee q$ es V y p es F, entonces $\boxed{q \text{ es V}}$.
Por lo tanto, el asesino de la Sra. Ximena fue el hijastro.

iii) ¿Qué otra información puede obtener?
Solución:

- El asesinato ocurrió antes de medianoche.
- El testimonio del hijastro es correcto.
- Las luces de la casa se apagaron a medianoche.
- El mayordomo no es millonario.