22202 Álgebra I – Edgard A. Araya C.

Una solución del Control 1

Lunes 16 de Noviembre de 2020

Pregunta 1

Identifique la siguiente frase con alguno de los siguientes argumentos:

1. José tiene un cuaderno o un lápiz , José no tiene un cuaderno , por lo tanto, José tiene un lápiz. ***Solución:*** $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

2. Si José gana el concurso entonces obtendrá una beca , José ganó el concurso, por lo tanto, José obtendrá la beca. ***Solución:*** $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

3. Si José gana el concurso entonces obtendrá una beca , José no obtuvo la beca, por lo tanto, José no ganó el concurso. ***Solución:*** $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow (\sim p)$
En este caso, se consideraba correcta la opción $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow (\sim q)$

4. Todos los monos son desordenados, luego, los monos son desordenados o son peludos.
Solución: $p \Rightarrow (p \vee q)$

5. Si no llueve entonces se perderá la cosecha, si se pierde la cosecha entonces no se podrá cancelar la deuda entonces , si no llueve, no se podrá cancelar la deuda.
Solución: $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

6. Ningún estudiante es ocioso y María es una excelente bailarina, luego, ningún estudiante es ocioso. ***Solución:*** $(p \wedge q) \Rightarrow p$ o bien $(p \wedge q) \Rightarrow q$

Pregunta 2

Usando identidades lógicas, demuestre la siguiente proposición:

1. $[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$
Solución:

$$\begin{array}{rll} & (p \vee q) \wedge (\sim p) & / \text{ Distributividad de } \vee \\ \Longleftrightarrow & (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p) & / \ p \wedge \sim p \equiv F \\ \Longleftrightarrow & F \vee (q \wedge \sim p) & \\ \Longleftrightarrow & q \wedge \sim p & / \ q \wedge \sim p \Rightarrow q \\ \boxed{\Longrightarrow} & q \quad \square . & \end{array}$$

2. $[(p \Rightarrow q) \wedge (p)] \Rightarrow q$

Solución:

$$
\begin{array}{lll}
 & (p \Rightarrow q) \wedge p & \text{/ Definición de } \Rightarrow \\
\Longleftrightarrow & (\sim p \vee q) \wedge p & \text{/ Distributividad de } \wedge \\
\Longleftrightarrow & (\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p) & / \sim p \wedge p \equiv F \\
\Longleftrightarrow & F \vee (q \wedge p) & \\
\Longleftrightarrow & q \wedge p & / \, q \wedge p \Rightarrow q \\
\boxed{\Longrightarrow} & q \quad \square. &
\end{array}
$$

3. $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow (\sim p)$

Solución:

$$
\begin{array}{lll}
 & (p \Rightarrow q) \wedge (\sim p) & \text{/ Definición de } \Rightarrow \\
\Longleftrightarrow & (\sim p \vee q) \wedge (\sim p) & \text{/ Distributividad de } \wedge \\
\Longleftrightarrow & (\sim p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p) & / \sim p \wedge \sim p \equiv V \\
\Longleftrightarrow & V \vee (q \wedge \sim p) & \\
\Longleftrightarrow & q \wedge \sim p & / \, q \wedge \sim p \Rightarrow \sim p \\
\boxed{\Longrightarrow} & \sim p \quad \square. &
\end{array}
$$

4. $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow (\sim p)$

Solución:

$$
\begin{array}{lll}
 & (p \Rightarrow q) \wedge (\sim p) & \text{/ Definición de } \Rightarrow \\
\Longleftrightarrow & (\sim p \vee q) \wedge (\sim p) & \text{/ Distributividad de } \wedge \\
\Longleftrightarrow & (\sim p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p) & / \sim p \wedge \sim p \equiv V \\
\Longleftrightarrow & V \vee (q \wedge \sim p) & \\
\Longleftrightarrow & q \wedge \sim p & / \, q \wedge \sim p \Rightarrow \sim p \\
\boxed{\Longrightarrow} & \sim p \quad \square. &
\end{array}
$$

5. $[(p \wedge q) \Longrightarrow p \;\; , \;\; (p \wedge q) \Longrightarrow q]$

Solución:

$$
\begin{array}{lll}
 & (p \wedge q) \Longrightarrow p & \text{/ Definición de } \Rightarrow \\
\Longleftrightarrow & \sim (p \wedge q) \vee p & \text{/ De Morgan para } \wedge \\
\Longleftrightarrow & (\sim p \vee \sim q) \vee p & \text{/ Conmutatividad de } \vee \\
\Longleftrightarrow & (\sim q \vee \sim p) \vee p & \text{/ Asociatividad de } \vee \\
\Longleftrightarrow & \sim q \vee (\sim p \vee p) & / \sim p \vee p \equiv V \\
\Longleftrightarrow & \sim q \vee V & / \sim q \vee V \equiv V \\
\Longleftrightarrow & V \quad \square. & \text{/ La demostración para } (p \wedge q) \Rightarrow q \text{ es análoga.}
\end{array}
$$

6. $[p \Longrightarrow (p \vee q)]$

Solución:

$$
\begin{array}{lll}
 & p \Longrightarrow (p \vee q) & \text{/ Definición de } \Rightarrow \\
\Longleftrightarrow & \sim p \vee (p \vee q) & \text{/ Asociatividad de } \vee \\
\Longleftrightarrow & (\sim p \vee p) \vee q & / \sim p \vee p \equiv V \\
\Longleftrightarrow & V \vee q & / \, V \vee q \equiv V \\
\Longleftrightarrow & V \quad \square. &
\end{array}
$$

Pregunta 3

Usar Tabla de Verdad para ver si la proposición es Tautología, Contradicción o Contingencia.

1. $[(p \vee q) \Rightarrow q] \Rightarrow (\sim p \vee q)$

Solución:

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$	FINAL
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

Por lo tanto, la proposición es Tautología $\square$.

2. $(p \Rightarrow q) \Longrightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)$

Solución:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)$	FINAL
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

Por lo tanto, la proposición es Tautología $\square$.

3. $\sim \underbrace{[(\sim p \Rightarrow q) \wedge \sim (p \wedge q)]}_{\%} \wedge q$

Solución:

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \Rightarrow q$	$\%$	$\sim \%$	FINAL
V	V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	F	V	F

Por lo tanto, la proposición es Contingencia $\square$.

4. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Longrightarrow (p \Rightarrow r)$

Solución:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)$	$p \Rightarrow r$	FINAL
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Por lo tanto, la proposición es Tautología $\square$.

Pregunta 4

Usando los datos proporcionados, obtenga el valor de verdad pedido:

1. Si se sabe que $p \wedge q$ **es V y además** $r \wedge p$ **es F, determinar el valor de** $(r \vee q) \Longrightarrow (r \wedge q)$
Solución: Como $p \wedge q$ es V, esto implica que p es V y que q es V. Como $r \wedge p$ es F y sabiendo que p es V, se sigue que r es F.

Con ello, $r \vee q$ es V y $r \wedge q$ es F. Por lo tanto, la proposición dada es F $\square$.

2. Sabiendo que $p \Rightarrow q$ **es F,** $r \wedge p$ **es F, determinar el valor de** $p \Leftrightarrow r$
Solución: Como $p \Rightarrow q$ es F, esto implica que p es V y que q es F. Como $r \wedge p$ es F y sabiendo que p es V, se sigue que r es F.

Como p es V y r es F, se concluye que la proposición dada es F $\square$.

3. Sabiendo que $p \Rightarrow q$ **es F,** $r \wedge p$ **es F, determinar el valor de** $\sim [p \wedge (\sim r)]$
Solución: Como $p \Rightarrow q$ es F, esto implica que p es V y que q es F. Como $r \wedge p$ es F y sabiendo que p es V, se sigue que r es F.

Como p es V y r es F, se sigue que $(\sim r)$ es V. Luego, $p \wedge (\sim r)$ es V.

Por lo tanto, la proposición dada es F $\square$.

4. De la falsedad de $[p \Rightarrow (\sim q)] \vee [(\sim r) \Rightarrow s]$**, deduzca el valor de verdad de** $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q)$
Solución: Como $[p \Rightarrow (\sim q)] \vee [(\sim r) \Rightarrow s]$, se sigue que $[p \Rightarrow (\sim q)]$ es F y que $[(\sim r) \Rightarrow s]$ es F.

Como $[p \Rightarrow (\sim q)]$ es F, entonces p es V y $\sim q$ es F; luego, q es V.

Como $[(\sim r) \Rightarrow s]$ es F, entonces $\sim r$ es V y s es F; luego, r es F.

Con ello, $(\sim p \wedge \sim q)$ es F, pues $\sim p$ es F. Además, $\sim q$ es F.

Por lo tanto, la proposición dada es F $\square$.

